Lösningar till tentamen i Matematik M1/MX1 del B 950901.

1. Lös ekvationen $z^2 - 3(1+j)z + 5j = 0$

   Lösning: $z^2 - 3(1+j)z + 5j = 0 \Leftrightarrow (z - \frac{3(1+j)}{2})^2 = (\frac{3(1+j)}{2})^2 - 5j \Leftrightarrow (z - \frac{3(1+j)}{2})^2 = -\frac{j}{2}$
   $z - \frac{3(1+j)}{2} = x + jy \Rightarrow (x+jy)^2 = -\frac{j}{2} \Rightarrow$
   $$\begin{cases} x^2 - y^2 &= 0 \\ 2xy &= -\frac{1}{2} \\ x^2 + y^2 &= \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x + jy = \pm\frac{1}{2}(1-j) \Rightarrow z = \frac{3(1+j)}{2} \pm \frac{1}{2}(1-j) \Rightarrow$$
   $z_1 = 2 + j, \quad z_2 = 1 + 2j$

2. Lös differentialekvationen $3(x^2 + 5x + 6)y' = y^2 + 5y + 4, \quad y(1) = 2$

   Lösning: $3(x^2 + 5x + 6)y' = y^2 + 5y + 4 \Rightarrow \frac{3dy}{y^2 + 5y + 4} = \frac{dx}{x^2 + 5x + 6} \Rightarrow$
   $$\frac{3dy}{(y+1)(y+4)} = \frac{dx}{(x+2)(x+3)} \Rightarrow \int (\frac{1}{y+1} - \frac{1}{y+4})dy = \int (\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3})dx \Rightarrow$$
   $$\ln\frac{|y+1|}{|y+4|} = \ln\frac{|x+2|}{|x+3|} + C_1 \Rightarrow \frac{y+1}{y+4} = \frac{C(x+2)}{x+3}, \quad y(1) = 2 \Rightarrow C = \frac{2}{3} \Rightarrow$$
   $y = \frac{5x+7}{x+5}$

3. (a) Lös differentialekvationen $y'' + 4y' + 5y = \sin(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

   Lösning: $K.E:\ s^2 + 4s + 5 = 0 \Rightarrow s_{12} = -2 \pm j \Rightarrow y_h = e^{-2t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$
   Ansats: $y = A\cos t + B\sin t \Rightarrow$
   $$-A\cos t - B\sin t + 4(B\cos t - A\sin t) + 5(A\cos t + B\sin t) = \sin t \Rightarrow \begin{cases} 4A + 4B &= 0 \\ -4A + 4B &= 1 \end{cases} \Rightarrow$$
   $A = -\frac{1}{8}, \quad B = \frac{1}{8} \Rightarrow y_p = \frac{1}{8}(\sin t - \cos t)$
   $y = e^{-2t}(C_1\cos t + C_2 \sin t) + \frac{1}{8}(\sin t - \cos t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{8}, \quad C_2 = \frac{9}{8} \Rightarrow y = \frac{1}{8}(e^{-2t}(\cos t + 9\sin t) + \cos t - \sin t)$

   (b) Lös differensekvationen $y_{n+2} + 4y_{n+1} + 4y_n = n2^n, \quad y_0 = 0, \quad y_1 = -1$

   Lösning: $K.E:\ s^2 + 4s + 4 = 0 \Rightarrow s_12 = -2 \Rightarrow y_n^{hom} = (C_1 n + C_2)(-2)^n$
   Ansats: $y_n = (An + B)2^n \Rightarrow$
   $$(A(n+2)+B)2^{n+2} + 4(A(n+1)+B)2^{n+1} + 4(An+B)2^n = n2^n \Rightarrow \begin{cases} 16A &= 1 \\ 16A + 16B &= 0 \end{cases} \Rightarrow$$
   $y_n^{part} = \frac{1}{16}(n-1)2^n \Rightarrow$
   $y_n = \frac{1}{16}(n-1)2^n + (C_1 n + C_2)(-2)^n$
   $y_0 = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{1}{16}, \quad y_1 = -1 \Rightarrow C_1 = \frac{7}{16} \Rightarrow y_n = \frac{1}{16}(n-1)2^n + (7n+1)(-2)^n$

4. Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin^2 x} - \sqrt{1 + 2x^2}}{x^4}$

   Lösning: $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + x^5 o(1) \Rightarrow$
   $$e^{\sin^2 x} = 1 + x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{2}(x^2 - \frac{1}{3}x^4)^2 + x^5 o(1) = 1 + x^2 + \frac{1}{6}x^4 + x^5 o(1)$$
   $$\sqrt{1 + 2x^2} = 1 + \frac{1}{2}2x^2 - \frac{1}{8}(2x^2)^2 + x^5 o(1) = 1 + x^2 - \frac{1}{2}x^4 + x^5 o(1)$$

$e^{\sin^2 x} - \sqrt{1+2x^2} = 1 + x^2 + \frac{1}{6}x^4 - (1 + x^2 - \frac{1}{2}x^4) + x^5 o(1) = \frac{2}{3}x^4 + x^5 o(1) \Rightarrow$

$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin^2 x} - \sqrt{1+2x^2}}{x^4} = \lim_{x\to 0}(\frac{2}{3} + x o(1)) = \frac{2}{3}$

5. Betrakta spiralen som i komplexa z-planet parametriseras genom $z = e^{(1+j)t}$, för $0 \le t \le 2\pi$. På denna spiral är en tråd lindad. Tråden lindas av med början i punkten $(1,0)$. Den avlindade tråden hålls sträckt varvid den fria trådänden kommer att följa en kurva $z = w(t)$ i det komplexa z-planet. Bestäm funktionen $w(t)$.

   Lösning: Spiralens tangent är $z'(t) = (1+j)e^{(1+j)t}$ vilket ger trådens riktning från spiralen. Den utrullade delen av tråden har längden $l(t) = \int_0^t |z'(\tau)|d\tau = \int_0^t \sqrt{2}e^{\tau}d\tau = \sqrt{2}(e^t - 1)$

   Den fria trådändens position ges då av $w(t) = z(t) - l(t)z'(t)/|z'(t)| =$

   $e^{(1+j)t} - \sqrt{2}(e^t-1)(1+j)e^{(1+j)t}/\sqrt{2}e^t = e^{(1+j)t} - (1-e^{-t})(1+j)e^{(1+j)t} =$

   $e^{(1+j)t} - (e^t - 1)(1+j)e^{jt} = (1 + j(1-e^t))e^{jt}$

6. Tangenten till kurvan $y = f(x)$ i punkten $(x_0, f(x_0))$ $0 < x_0 \le 1$, skär y-axeln i punkten $(0, \int_{x_0}^1 \sqrt{1+(f'(x))^2}dx)$. Bestäm $f(x)$ för $0 < x \le 1$ då $f(1) = 0$.

   Lösning: Tvåpunktsformeln för riktningskoefficienten till tangenten ger att

   $f'(x_0) = \frac{\int_{x_0}^1 \sqrt{1+(f'(x))^2} - f(x_0)}{0 - x_0}$.

   Multiplikation med x_0 och derivering med avseende på x_0 ger

   $-x_0 f''(x_0) - f'(x_0) = -\sqrt{1+(f'(x_0))^2} - f'(x_0)$.

   Byt ut x_0 mot x och $f'(x_0)$ mot z så erhålls $xz' = \sqrt{1+z^2}$ vars lösning ges av

   $\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \int \frac{dx}{x}$. Vi får $\ln|z + \sqrt{1+z^2}| = \ln|x| + C_1$ vilket ger $z + \sqrt{1+z^2} = Cx$.

   Eftersom $f(1) = 0$ och tangenten i $(1, f(1)$ skär y-axeln i $(0,0)$ så är $y'(1) = 0$. Alltså är $C = 1$ och $z + \sqrt{1+z^2} = x$.

   $z + \sqrt{1+z^2} = x \Rightarrow \sqrt{1+z^2} = x - z \Rightarrow 1 + z^2 = (x-z)^2 \Rightarrow x^2 - 1 = 2xz \Rightarrow f'(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x} \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\ln x + C_2$. $y(1) = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{1}{4} \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{4}$

7. Vilken/vilka av följande differentialekvationer är linjär(a)?
   För vilken/vilka av de linjära kan man använda karakteristiska ekvationen för att bestämma allmänna lösningen?
   Motivera dina svar. Formulera den/de satser du utnyttjar. Visa gärna konkret att det du kallar allmänna lösningen verkligen satisfierar ekvationen.

   (a) $y'' + 5xy' + 6x^2y = 0$

   (b) $2xy'y'' - 3x^2y^2 - 2y = 0$

   (c) $y'' + 5y' + 6y = 0$

   Lösning: Ekvationerna (a) och (c) är linjära. Endast (c) kan lösas med hjälp av karakteristiska ekvationen.

   En differentialekvation kallas linjär om den skrivs $\sum_{k=0}^{n} f_k(x)y^{(k)} = g(x)$ vilket visar att (b) inte är linjär.

För en linjär ekvation med konstanta koefficienter ($f_k(x)$ är konstant för alla k) gäller att lösningarna till den karakteristiska ekvationen $K.E: \sum_{k=0}^{n} a_k s^k = 0$ ger allmänna lösningen. För ekvation (a) skulle K.E vara $s^2 + 5xs + 6x^2 = 0$ vars lösningar är $s_1 = 2x$ $s_2 = 3x$. Derivering visar direkt att $y = e^{s_1 x} = e^{2x^2}$ inte är en lösning till ekvation (a).

Den sats man utnyttjar vid lösningen av (c) säger:

Om s_0 är en rot av multiplicitet m_0 till den karakteristiska ekvationen $K.E: \sum_{k=0}^{n} a_k s^k = 0$ till en linjär differentialekvation $\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = 0$ med konstanta koefficienter och $p_0(x)$ är ett polynom av grad högst $m_0 - 1$ så är $p_0(x)e^{s_0 x}$ lösning till differentialekvationen. Alla lösningar till differentialekvationen erhålls på detta sätt.

8. Algebrans fundamentalsats säger att varje algebraisk ekvation, $p(z) = 0$, där $p(z)$ är ett polynom, har minst en komplex rot. Utnyttja detta för att visa att om $p(z)$ är ett polynom av grad n så har ekvationen $p(z) = 0$ exakt n rötter då dessa räknas med multiplicitet. Formulera och bevisa den/de satser (utöver algebrans fundamentalsats) du utnyttjar.

   Lösning: Enligt faktorsatsen är z_1 rot till $p(z) = 0 \Leftrightarrow (z - z_1)$ är en faktor i $p(z)$ Genom att upprepat utnyttja algebrans fundamentalsats får vi en fullständig faktorisering av $p(z)$ i n stycken faktorer av grad 1. Varje faktor hör till en rot och vi får att ekvationen har exakt n rötter. Den sats som skall formuleras och bevisas är faktorsatsen. (Se boken.)

Carl-Henrik