Matematiska Institutionen
Chalmers Tekniska Högskola

**Lösningar till tentamen i Matematik för M1/MX1, Matematisk analys i en variabel, del B, 960411**

1. Lös följande differentialekvationer för $x > 0$

   (a) $xy' + \frac{1}{2}y = x^2$. (4p)

   **Lösning:** $y' + \frac{y}{2x} = x$; $\int \frac{dx}{2x} = \frac{1}{2}\ln(x)$; $I.F. = e^{\frac{1}{2}\ln(x)} = \sqrt{x}$; $\sqrt{x}y' + \frac{y}{2\sqrt{x}} = x^{\frac{3}{2}}$; $(\sqrt{x}y)' = x^{\frac{3}{2}}$; $\sqrt{x}y = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$; $y = \frac{2}{5}x^2 + \frac{C}{\sqrt{x}}$

   (b) $xy' + \frac{1}{2}y = y^2$. (4p)

   **Lösning:** $xy' + \frac{1}{2}y = y^2 \Leftrightarrow xy' = y^2 - \frac{1}{2}y \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y^2 - \frac{1}{2}y} = \int \frac{dx}{x}$ om $y \neq 0$ $y \neq \frac{1}{2}$.

   $$\int \frac{dy}{y^2 - \frac{1}{2}y} = \int \left(\frac{2}{y - \frac{1}{2}} - \frac{2}{y}\right) dy = 2\ln\frac{y - \frac{1}{2}}{y}.$$

   $\frac{y - \frac{1}{2}}{y} = C\sqrt{x}$ samt $y = 0$ och $y = \frac{1}{2}$

   $y = \frac{1}{2(1 - C\sqrt{x})}$ samt $y = 0$.

2. Maclaurinutveckla funktionen $\frac{\ln(1+x) + \sin(2x)}{e^x - 1}$ med termer till och med $x^2$. Restterm på ordoform. (6p)

   **Lösning:** Enklast med ansats: $f(x) = \frac{\ln(1+x) + \sin(2x)}{e^x - 1} = a + bx + cx^2 + x^2o(1) \Rightarrow$ $\ln(1+x) + \sin(2x) = (e^x - 1)(a + bx + cx^2 + x^2o(1)) \Rightarrow x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + 2x - \frac{8x^3}{6} + x^3o(1) = (x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3o(1))(a + bx + cx^2 + x^2o(1)) \Rightarrow 3x - \frac{x^2}{2} - x^3 + x^3o(1) = ax + (\frac{a}{2} + b)x^2 + (\frac{a}{6} + \frac{b}{2} + c)x^3 + x^3o(1) \Rightarrow \begin{cases} a &= 3 \\ \frac{a}{2} + b &= -\frac{1}{2} \\ \frac{a}{6} + \frac{b}{2} + c &= -1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 3 - 2x - \frac{1}{2}x^2 + x^2o(1)$

3. (a) Lös differentialekvationen $y'' + 5y' + 4y = 4t + 1$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 4$ (3p)

   **Lösning:** $K.E. = r^2 + 5r + 4 = 0$, rötter $r_1 = -4$, $r_2 = -1$

   Partikulärlösning: Ansats $y_p = at + b \Rightarrow y_p = t - 1$

   $y = C_1e^{-4t} + C_2e^{-t} + t - 1$. $y(0) = C_1 + C_2 - 1 = -1 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0$; $y'(0) = -4C_1 - C_2 + 1 = 4 \Rightarrow 4C_1 + C_2 = -3 \Rightarrow C_1 = -1$, $C_2 = 1 \Rightarrow y = e^{-t} - e^{-4t} + t - 1$

   (b) Lös differensekvationen $y_{n+2} + 5y_{n+1} + 4y_n = 20n + 4$, $y_0 = -1$, $y_1 = 2$. (3p)

   **Lösning:** $y_n^{hom} = C_1(-4)^n + C_2(-1)^n$

   Partikulärlösning: Ansats $y_n^{part} = an + b \Rightarrow a(n+2) + b + 5(a(n+1) + b) + 4(an + b) = 20n + 4 \Rightarrow a = 2$, $b = -1$

   $y_n = C_1(-4)^n + C_2(-1)^n + 2n - 1$. $y_0 = C_1 + C_2 - 1 = -1$, $y_1 = -4C_1 - C_2 + 1 = 2 \Rightarrow C_1 = -\frac{1}{3}$, $C_2 = \frac{1}{3} \Rightarrow y_n = \frac{1}{3}(-1)^n - \frac{1}{3}(-4)^n + 2n - 1$.

4. Funktionen $f(x)$ är definierad och positiv för $x > 0$, $f(1) = 1$. För varje punkt $(x_0, f(x_0))$ på kurvan $y = f(x)$ gäller att arean av triangeln som bildas av linjen från origo till denna punkt, kurvtangenten i denna punkt samt $y$-axeln har arean $f(x_0)$. Bestäm $f(x)$. (6p)

   **Lösning:** Tangenten går genom punkterna $(x, y)$ och $(0, a)$ där $a$ uppfyller areavillkoret

$\frac{xa}{2} = y$. Tvåpunktsformeln ger då $y' = \dfrac{y-a}{x-0} = \dfrac{y-\frac{2y}{x}}{x} = y\dfrac{x-2}{x^2}$ vars lösning ges av $\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right) dx \Rightarrow y = Cxe^{\frac{2}{x}}$.

$f(1) = 1 \Rightarrow f(x) = xe^{\frac{2}{x}-2}$.

5. Lös följande system av differentialekvationer.

$$\left\{\begin{array}{lcl} x'(t) & = & x - y + z \\ y'(t) & = & x + y - z \\ z'(t) & = & 2x - y \end{array}\right. . \qquad \text{(6p)}$$

**Lösning:** $$\left\{\begin{array}{lcl} x'(t) & = & x - y + z \\ y'(t) & = & x + y - z \\ z'(t) & = & 2x - y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} z & = & x'(t) - x + y \\ x' - 2x + y' & = & 0 \\ x'' - x' - 2x + y' + y & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} z & = & x'(t) - x + y \\ x' - 2x + y' & = & 0 \\ x'' - 2x' + y & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} z & = & x'(t) - x + y \\ y & = & -x'' + 2x' \\ x''' - 2x'' - x' + 2x & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} z & = & x'(t) - x + y \\ y & = & -x'' + 2x' \\ x & = & C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3e^{2t} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3e^{2t} \\ y & = & C_1e^t - 3C_2e^{-t} \\ z & = & C_1e^t - 5C_2e^{-t} + C_3e^{2t} \end{array}\right.$$

6. Vid en kemisk reaktion reagerar ett ämne $A$ och bildar först ett ämne $B$ som sedan i sin tur antingen återgår till ämnet $A$ eller bildar ämnet $C$. Reaktionshastigheterna $(mol/s)$ är proportionella mot mängden av det reagerande ämnet med proportionaliteter $k_1$ för bildandet av ämne $B$ från ämne $A$, $k_2$ för bildandet av $A$ från $B$ och $k_3$ för bildandet av $C$ från $B$. Ämnet $C$ är stabilt. Detta innebär exempelvis att om mängden av ämne $B$ är $n_B(t)$ så bildas $k_3n_B$ $mol$ av ämne $C$ per tidsenhet dvs $n'_C = k_3n_B$. Antag att $n_A(0) = N$, $n_B(0) = n_C(0) = 0$, $k_1 = 2k$ samt $k_2 = k_3 = k$. Bestäm $n_C(t)$ för $t > 0$. (6p)

**Lösning:** $$\left\{\begin{array}{lcl} n'_A & = & k_2n_B - k_1n_A \\ n'_B & = & k_1n_A - k_2n_B - k_3n_B \\ n'_C & = & k_3n_B \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} k_1 & = & 2k \\ k_2 & = & k \\ k_3 & = & k \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} n'_A & = & kn_B - 2kn_A \\ n'_B & = & 2kn_A - 2kn_B \\ n'_C & = & kn_B \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} n_B & = & \frac{1}{k}n'_A + 2n_A \\ frac1kn''_A + 2n'_A & = & 2kn_A - 2(n'_A + 2kn_A) \\ n'_C & = & kn_B \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} n_B & = & \frac{1}{k}n'_A + 2n_A \\ n''_A + 4kn'_A + 2k^2n_A & = & 0 \\ n'_C & = & kn_B \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} n_A & = & C_1e^{-k(2+\sqrt{2})t} + C_2e^{-k(2-\sqrt{2})t} \\ n_B & = & -\sqrt{2}C_1e^{-k(2+\sqrt{2})t} + \sqrt{2}C_2e^{-k(2-\sqrt{2})t} \\ n_C & = & n_A(0) - n_A - n_B + \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{lclcl} n_A(0) & = & C_1 + C_2 & = & N \\ n_B & = & \sqrt{2}(C_2 - C_1) & = & 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} n_A & = & \frac{N}{2}(e^{-k(2+\sqrt{2})t} + e^{-k(2-\sqrt{2})t}) \\ n_B & = & \frac{N}{\sqrt{2}}(e^{-k(2-\sqrt{2})t} - e^{-k(2+\sqrt{2})t}) \\ n_C & = & N - n_A - n_B \end{array}\right.$$

7. Vad är en separabel differentialekvation? Härled en lösningsmetod för sådana differentialekvationer. (6p)

8. Formulera och bevisa integralkalkylens medelvärdessats. (6p)

Carl-Henrik