Matematiska Institutionen
Chalmers Tekniska Högskola

Lösningar till tentamen i Matematik för M1, Matematisk analys i en variabel, del B, 960823

1. (a) Bestäm y_2 och y_3 dels direkt med differensekvationen, dels med hjälp av ekvationens lösning, då $y_{n+2}+4y_{n+1}+3y_n = 8n-2$, $\quad y_0=0$ och $y_1=1$. (4p)

   Lösning: $y_{n+2} = 8n-2-4y_{n+1}-3y_n$, $\quad y_0 = 0 \quad$ och $\quad y_1 = 1 \Rightarrow y_2 = -2-4y_1-3y_0 = -6$ och $y_3 = 8-2-4y_2-3y_1 = 27$.

   $K.E. r^2+4r+3=0 \Rightarrow r_1=-1$ och $r_2=-3 \Rightarrow y_n^{hom} = C_1(-1)^n + C_2(-3)^n$

   Ansats: $y_n^{part} = An+B \Rightarrow A(n+2)+B+4(A(n+1)+B)+3(An+B) = 8n-4 \Rightarrow$
   $A=1, \quad B=-1 \Rightarrow y_n = n-1+C_1(-1)^n+C_2(-3)^n$
   $y_0 = -1+C_1+C_2 = 0 \Rightarrow C_1+C_2=1$
   $y_1 = -C_1-3C_2 = 1 \Rightarrow C_1+3C_2=-1$
   $\Rightarrow C_1=2, \quad C_2=-1 \Rightarrow y_n = n-1+2(-1)^n-(-3)^n$

   $y_2 = 2-1+2-9=-6$ och $y_3 = 3-1-2+27=27$.

   (b) Bestäm $y(1)$ då $y''(x)+2y'(x)+2y(x) = 4x+4$, $\quad y(0)=0$ och $y(2)=4$. (4p)

   Lösning: $K.E. r^2+2r+2=0, \Rightarrow r=-1\pm i \Rightarrow y_h = e^{-x}(C_1\cos(x)+C_2\sin(x))$

   $y_p = Ax+B \Rightarrow y' = A \Rightarrow y''=0 \Rightarrow 2A+2(Ax+B) = 4x+4 \Rightarrow A=2, \quad B=0 \Rightarrow$
   $y = e^{-x}(C_1\cos(x)+C_2\sin(x))+2x$
   $y(0)=C_1=0 \quad y(2) = e^{-2}C_2\sin(2)+4 = 4 \Rightarrow C_2=0 \Rightarrow y=2x.$

2. Lös differentialekvationen $y'(x)\sqrt{x^2+1}+y(x) = x\sqrt{x^2+1}$, $y(0)=1$ (6p)

   Lösning: $y'(x)\sqrt{x^2+1}+y(x) = x\sqrt{x^2+1} \Rightarrow y' + \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}y = x.$

   $$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln(x+\sqrt{x^2+1}) \Rightarrow I.F. = x+\sqrt{x^2+1}.$$

   $(x+\sqrt{x^2+1})y' + (x+\sqrt{x^2+1})\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}y = x(x+\sqrt{x^2+1}) \Rightarrow ((x+\sqrt{x^2+1})y)' = x^2+x\sqrt{x^2+1} \Rightarrow (x+\sqrt{x^2+1})y = \dfrac{1}{3}x^3+\displaystyle\int x\sqrt{x^2+1}\,dx = \dfrac{1}{3}(x^3+(x^2+1)^{\frac{3}{2}})+C$

   $$y(0)=1 \Rightarrow C=\frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{x^3+(x^2+1)^{\frac{3}{2}}+2}{3(x+\sqrt{x^2+1})}.$$

3. Bestäm Maclaurinutvecklingen, med restterm $x^7o(1)$, av funktionen $f(x) = ln(1+\sin^2(x))$. (6p)

   Lösning: $\sin^2(x) = (x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}+x^6o(1))^2 = x^2-\dfrac{2x^4}{6}+\dfrac{2x^6}{120}+\dfrac{x^6}{36}+x^7o(1)$
   $\ln(1+t) = t-\dfrac{1}{2}t^2+\dfrac{1}{3}t^3-\dfrac{1}{4}t^4+t^4o(1)$
   $t=\sin^2(x) \Rightarrow t^2 = x^4-\dfrac{2x^6}{3}+x^7o(1), \quad t^3 = x^6+x^7o(1), \quad t^4 = x^7o(1)$
   $ln(1+\sin^2(x)) = x^2-\dfrac{5x^4}{6}+\dfrac{32x^6}{45}+x^7o(1)$

4. Kurvan $y=f(x)$ är sådan att normalen i punkten (x,y) går genom punkten $(-x^3,y^3)$. Kurvan går genom punkten $(1,2)$. Bestäm $f(x)$. (6p)

   Lösning: Normal genom (x,y) och $(-x^3,y^3) \Rightarrow k_n = \dfrac{y-y^3}{x+x^3} \Rightarrow y' = \dfrac{-1}{k_n} = -\dfrac{x+x^3}{y-y^3} \Rightarrow$
   $\displaystyle\int(y^3-y)dy = \int(x^3+x)dx \Rightarrow \dfrac{y^4}{4}-\dfrac{y^2}{2} = \dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^2}{2}+C, \quad y(1)=2 \Rightarrow 4-2 = \dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}+C \Rightarrow$

$C=\dfrac{5}{4} \Rightarrow y^4-2y^2=x^4+2x^2+5 \Rightarrow y^2=1\pm\sqrt{x^4+2x^2+6}$

$y(1)=2 \Rightarrow f(x)=\sqrt{1+\sqrt{x^4+2x^2+6}}$

5. En positivt laddad partikels läge i xy-planet vid tiden t ges av $x=x(t)$, $y=y(t)$. Vid $t=0$ är partikeln i vila i origo och utsätts då $t>0$ för elektriska och magnetiska fält så att partikeln rörelseekvationer blir $\left\{\begin{array}{lcl} x''(t) & = & y'(t) \\ y''(t) & = & 1-x'(t) \end{array}\right.$. Bestäm partikelns läge för $t>0$. (6p)

Lösning: $\left\{\begin{array}{lcl} x'' & = & y' \\ y'' & = & 1-x' \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x'' & = & y' \\ x'''+x' & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & t+C_1+C_2\cos(t)+C_3\sin(t) \\ y'(t) & = & x''(t) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & t+C_1+C_2\cos(t)+C_3\sin(t) \\ y(t) & = & -C_2\sin(t)+C_3\cos(t)+C_4 \end{array}\right.$.

Vila i origo vid $t=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x(0) & = & 0 \\ x`(0) & = & 0 \end{array}\right.$ och $\left\{\begin{array}{lcl} y(0) & = & 0 \\ y`(0) & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\left\{\begin{array}{lcl} C_1+C_2 & = & 0 \\ 1+C_3 & = & 0 \\ C_3+C_4 & = & 0 \\ -C_2 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & t-\sin(t) \\ y(t) & = & 1-\cos(t) \end{array}\right.$.

6. En bassäng som rymmer 3000 liter är fylld med förorenat vatten. Föroreningens koncentration är 5 %. Man börjar tappa ut det förorenade vattnet med en hastighet av 50 l/min. Samtidigt påfylls rent vatten med samma hastighet. Hur lång tid tar det innan föroreningens koncentration gått ner till 1 %? (Under hela förloppet sker omröring i bassängen, varför man kan anta att vätskan är fullständigt blandad.) (6p)

Lösning: In: Rent vatten 50 l/min
Ut: Förorenat vatten 50 l/min.
Volym: 3000 l
Tiden från tappstart: t min
Mängd förorening: $m(t)$ kg
Koncentration: $c(t)=\frac{m(t)}{3000}$ $c(0)=0.05$

$m'(t)=-50c(t) \Rightarrow c'(t)=-\dfrac{50c(t)}{3000} \Rightarrow c(t)=c(0)e^{\frac{-t}{60}}=0.05e^{\frac{-t}{60}}$.

$c(t_1)=0.01 \Rightarrow 0.05e^{\frac{-t_1}{60}}=0.01 \Rightarrow t_1=60\ln(5)\approx 97$ min.

7. Formulera och bevisa entydighetssatsen för Maclaurinutvecklingar. Ge ett exempel på hur den kan användas. (6p)

8. Betrakta en andra ordningens linjär differentialekvation med konstanta koefficienter $y''(t)+2by'(t)+ay(t)=0$. Hur ser den allmänna lösningen till differentialekvationen ut? Bevisa att det du kallar allmän lösning satisfierar differentialekvationen! Bevisa att ekvationen inte har någon annan lösning. (6p)

Carl-Henrik