Matematiska Institutionen
Chalmers Tekniska Högskola

Lösning till tentamen i Matematik för M1/MX1, Matematisk analys i en variabel, del B, 961216.

1. Beräkna arean av området som avgränsas av kurvan $y = \dfrac{1}{4e^x - e^{-x}}$, y-axeln och

   (a) x-axeln för $0 \le x \le \ln 4$ samt linjen $x = \ln 4$. (6p)

   Lösning: $4e^x - e^{-x} = (4e^{2x} - 1)e^{-x} = (2e^x - 1)(2e^x + 1)e^{-x} > 0$ för $x \ge 0$.

   Arean $= \displaystyle\int_0^{\ln 4} \frac{dx}{4e^x - e^{-x}} = \int_0^{\ln 4} \frac{e^x\,dx}{4e^{2x} - 1} = \left\{ \begin{array}{ll} e^x = t & x = \ln 4 \Rightarrow t = 4 \\ e^x\,dx = dt & x = 0 \Rightarrow t = 1 \end{array} \right\} =$
   $\displaystyle\int_1^4 \frac{dt}{4t^2 - 1} = \frac{1}{2}\int_1^4 \left(\frac{1}{2t-1} - \frac{1}{2t+1}\right) dt = \left[\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2t-1}{2t+1}\right|\right]_1^4 = \frac{1}{4}\left(\ln\frac{7}{9} - \ln\frac{1}{3}\right) =$
   $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{7}{3}$

   (b) hela positiva x-axeln. (2p)

   Lösning: Arean $= \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{4e^x - e^{-x}} = \int_0^{\infty} \frac{e^x\,dx}{4e^{2x} - 1} = \left\{ \begin{array}{ll} e^x = t & x \to \infty \Rightarrow t \to \infty \\ e^x\,dx = dt & x = 0 \Rightarrow t = 1 \end{array} \right\} =$
   $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dt}{4t^2 - 1} = \frac{1}{2}\int_1^{\infty} \left(\frac{1}{2t-1} - \frac{1}{2t+1}\right) dt = \left[\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2t-1}{2t+1}\right|\right]_1^{\infty} = \frac{1}{4}\left(\ln 1 - \ln\frac{1}{3}\right) =$
   $\dfrac{1}{4}\ln 3$

2. Lös följande differentialekvationer.

   (a) $(x+3)y' - y = x$, $y(-2) = 0$. (3p)

   Lösning: Antag $x \ne -3$. $D.E. \Leftrightarrow y' - \dfrac{y}{(x+3)} = \dfrac{x}{(x+3)}$, $\displaystyle\int -\frac{y}{(x+3)}dx =$
   $-\ln(x+3) \Rightarrow I.F. = e^{-\ln(x+3)} = \dfrac{1}{x+3}$, $D.E. \Leftrightarrow \dfrac{y'}{(x+3)} - \dfrac{y}{(x+3)^2} = \dfrac{x}{(x+3)^2} \Leftrightarrow$
   $\left(\dfrac{y}{(x+3)}\right)' = \dfrac{1}{x+3} - \dfrac{3}{(x+3)^2} \Leftrightarrow \left(\dfrac{y}{(x+3)}\right) = \displaystyle\int \frac{1}{x+3} - \frac{3}{(x+3)^2}dx \Leftrightarrow \left(\frac{y}{(x+3)}\right) =$
   $\ln|x+3| + \dfrac{3}{x+3} + C$, $\quad y(-2) = 0 \Rightarrow y = (x+3)\ln|x+3| - 3x - 6$

   (b) $(x+3)y' - y = y^2$, $y(0) = 1$. (3p)

   Lösning: Antag $x \ne -3$. Eftersom $y(0) = 1$ så kan vi anta att $y(y+1) \ne 0$ och alltså är $(x+3)y' = y^2 + y \Leftrightarrow \displaystyle\int \frac{dy}{y(y+1)} = \int \frac{dx}{x+3} \Leftrightarrow \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}\right) = \ln|x+3| + C_1 \Leftrightarrow$
   $\ln\left|\dfrac{y}{y+1}\right| = \ln|x+3| + C_1 \Leftrightarrow \dfrac{y}{y+1} = C(x+3) \Leftrightarrow y = \dfrac{C(x+3)}{1 - C(x+3)}$, $\quad y(0) = 1 \Rightarrow$
   $y = \dfrac{3+x}{3-x}$.

3. Beräkna gränsvärdet $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x^2} - \cos x}{x(x - \sin x)}$ (6p)

   Lösning: $\sqrt{1+t} = (1+t)^{\frac{1}{2}} = 1 + \dfrac{1}{2}t + \dfrac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)}{2!}t^2 + t^3B_1(t) \Rightarrow \sqrt{1-x^2} = 1 - \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{8}x^4 - x^6B_2(x)$

   $\cos(x) = 1 - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{4!}x^4 + x^6B_3(x) \Rightarrow \sqrt{1-x^2} - \cos(x) = -(\dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{24})x^4 + x^6B(x) = -\dfrac{1}{6}x^4 + x^6B(x)$

   $x(x - \sin x) = x(x - (x - \dfrac{1}{3!}x^3 + x^5B_3(x))) = \dfrac{1}{6}x^4 + x^6B_3(x) \Rightarrow \dfrac{\sqrt{1-x^2} - \cos x}{x(x - \sin x)} =$
   $\dfrac{-\frac{1}{6}x^4 + x^6B(x)}{\frac{1}{6}x^4 + x^6B_3(x)} = \dfrac{-\frac{1}{6} + x^2B(x)}{\frac{1}{6} + x^2B_3(x)} \to -1$ då $x \to 0$.

4. Lös differentialekvationen $y^{(4)} + 2y''' - 2y' - y = e^{-x}$ (6p)

Lösning: $K.E: \; r^4 + 2r^3 - 2r - 1 = 0 \Leftrightarrow (r-1)(r+1)^3 = 0.$

$y_h = C_1 e^x + (C_2x^2 + C_3x + C_4)e^{-x}$

Ansats: $y_p = Ax^3e^{-x} \Rightarrow y' = A(3x^2 - x^3)e^{-x}, \quad y'' = A(6x - 6x^2 + x^3)e^{-x}, \quad y''' = A(6 - 18x + 9x^2 - x^3)e^{-x}, \quad y^{(4)} = A(-24 + 36x - 12x^2 + x^3)e^{-x} \Rightarrow$

$y^{(4)} + 2y''' - 2y' - y = -12Ae^{-x} \Rightarrow A = -\dfrac{1}{12} \Rightarrow y = C_1e^x + (-\dfrac{1}{12}x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4)e^{-x}.$

5. Två konkurrerande djurarter, x och y, lever inom samma område. Antalet x-djur år n är x_n, antalet y-djur är y_n. Båda arterna har samma fortplantningscykel och -framgång. Utan konkurrens skulle båda arterna öka med 20% per år men på grund av konkurrensen dödar 80% av y-djuren ett x-djur varje under det att 20% av x-djuren dödar ett y-djur per år. Antalet djur satisfierar då följande ekvationssystem.

$$\begin{cases} x_{n+1} &= 1.2x_n - 0.8y_n \\ y_{n+1} &= -0.2x_n + 1.2y_n \end{cases}$$

Bestäm x_n och y_n om $x_0 = 100$ och $y_0 = 40$. Kommer någon art att dö ut? (6p)

Lösning: $\begin{cases} x_{n+1} &= 1.2x_n - 0.8y_n \\ y_{n+1} &= -0.2x_n + 1.2y_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_n &= \frac{3}{2}x_n - \frac{5}{4}x_{n+1} \\ \frac{3}{2}x_{n+1} - \frac{5}{4}x_{n+2} &= -0.2x_n + 1.2(\frac{3}{2}x_n - \frac{5}{4}x_{n+1}) \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} y_n = \frac{3}{2}x_n - \frac{5}{4}x_{n+1} \\ x_{n+2} - 2.4x_{n+1} + 1.28x_n = 0 \end{cases}$$

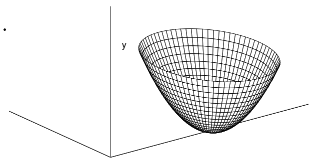
$K.E.: \; r^2 - 2.4r + 1.28 = 0 \Leftrightarrow r_1 = 1.6 \; r_2 = 0.8$

$$\begin{cases} x_n &+ \; C_1(1.6)^n + C_2(0.8)^n \\ y_n &= \; = C_1(\frac{3}{2} - 1.6\frac{5}{4})(1.6)^n + C_2(\frac{3}{2} - 0.8\frac{5}{4})(0.8)^n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_n &+ \; C_1(1.6)^n + C_2(0.8)^n \\ y_n &= \; = -C_1\frac{1}{2}(1.6)^n + C_2\frac{1}{2}(0.8)^n \end{cases}.$$

$$\begin{cases} x_0 &= 100 \\ y_0 &= 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 &= 100 \\ -C_1\frac{1}{2} + C_2\frac{1}{2} &= 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 &= 10 \\ C_2 &= 90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_n &= 90(0.8)^n + 10(1.6)^n \\ y_n &= 45(0.8)^n - 5(1.6)^n \end{cases}.$$

$y_n < 0$ för $n > 3$ y-djuren dör ut under fjärde året.

6. En behållare fylld med vatten har formen av en rotations-. kropp som bildas då en kurva $r = r(y)$, $0 \le y \le H$, roterar kring y-axeln. Vattnet rinner ut genom ett hål i botten av behållaren. Utströmningen antas vara sådan att Torricellis lag gäller så utströmningshastigheten är $k\sqrt{y}$ m^3/s. Bestäm hur lång tid det tar för vattnet att rinna ut. Svara med en integral. (6p)



Lösning: Tiden $= t$ (s). Vattennivå $= y(t)$ (m). Vattenvolym $= V(y)$ (m^3). Maximal vattennivå $= H = y(0)$ (m). Maximal vattenvolym $V(H)$ m^3.

Enligt Torricellis lag fås $\dfrac{dV}{dt} = -k\sqrt{y}.$

Behållaren är en rotationskropp varför $V(y) = \displaystyle\int_0^y \pi r^2(u)du$. Derivering ger $\dfrac{dV}{dy} = \pi r^2(y)$ och enligt kedjeregeln: $\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{dV}{dy}\dfrac{dy}{dt} = \pi r^2(y)\dfrac{dy}{dt}.$

Torricellis lag ger alltså $\pi r^2(y)y' = -k\sqrt{y}$ vars lösning ges av $\displaystyle\int \pi\frac{r^2(y)}{\sqrt{y}}dy = C - kt$

Sätt $F(y) = \displaystyle\int \pi\frac{r^2(y)}{\sqrt{y}}dy$. Då ges lösningen ovan av $F(y) = C - kt$. Begynnelsevillkoret $y(0) = H$ ger $C = F(H)$ och $F(y) = F(H) - kt$. Vi söker t_0 så att $y(t_0) = 0$, dvs $F(0) = F(H) - kt_0$. Då är $t_0 = \dfrac{1}{k}(F(H) - F(0)) = \dfrac{1}{k}\displaystyle\int_0^H \pi\frac{r^2(y)}{\sqrt{y}}dy$

Carl-Henrik