Matematiska Institutionen
Chalmers Tekniska Högskola

Lösning till tentamen i Matematik för M1, Matematisk analys i en variabel, del B. 970403

1. (a) Bestäm (på reell form) allmänna lösningen till $3y'' - 3y' + y = x$. (4p)

   Lösning: $K.E.3r^2 - 3r + 1 = 0$ rötter $r = \frac{1}{2} \pm i\frac{1}{\sqrt{3}}$. Partikulär lösning: $y = x + 3$.

   Svar: Allmän lösning $y = e^{\frac{x}{2}}(A\cos\frac{x}{2\sqrt{3}} + B\sin\frac{x}{2\sqrt{3}}) + x + 3$.

   (b) Bestäm lösningen till $2x_{n+2} + 5x_{n+1} - 3x_n = 5(-2)^n$, $x_0 = 2 \quad x_1 = 0$ (4p)

   Lösning: $K.E.2r^2 + 5r - 3 = 0$ rötter $r_1 = -3$, $r_2 = \frac{1}{2}$.

   Homogen lösning: $x_n^{hom} = C_1(-3)^n + C_2(\frac{1}{2})^n$.

   Partikulär lösning: Ansats $x_n = A(-2)^n$ ger $A(2(-2)^2 + 5(-2) - 3)(-2)^n = 5(-2)^n$. $A = -1$

   Allmän lösning: $x_n = C_1(-3)^n + C_2(\frac{1}{2})^n - (-2)^n$.

   $x_0 = C_1(-3)^0 + C_2(\frac{1}{2})^0 - (-2)^0$, $\quad x_1 = C_1(-3)^1 + C_2(\frac{1}{2})^1 - (-2)^1, \Rightarrow C_1 = 1 \quad C_2 = 2$

   Svar: $x_n = (-3)^n + 2(\frac{1}{2})^n - (-2)^n$.

2. Beräkna $\displaystyle\int_1^\infty \frac{(3x-1)dx}{x^3 + x^2 - x + 15}$ (6p)

   Lösning: $\displaystyle\frac{(3x-1)}{x^3 + x^2 - x + 15} = \frac{(3x-1)}{(x+3)(x^2 - 2x + 5)} = \frac{1}{2}(\frac{-1}{x+3} + \frac{x+1}{x^2 - 2x + 5})$.

   $$\int_1^\infty \frac{(3x-1)dx}{x^3 + x^2 - x + 15} = \frac{1}{2}\int_1^\infty (\frac{-1}{x+3} + \frac{x-1}{x^2-2x+5} + \frac{2}{x^2-2x+5})dx =$$
   $$\frac{1}{2}\left[-\ln|x+3| + \frac{1}{2}\ln(x^2 - 2x + 5) + \arctan(\frac{x-1}{2})\right]_1^\infty =$$
   $$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\ln\frac{x^2 - 2x + 5}{(x+3)^2} + \frac{\pi}{2} - (-\ln 4 + \frac{1}{2}\ln 4 - 0)) = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} + \ln 2)$$

   Svar: $\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} + \ln 2)$

3. Bestäm funktionen $y = y(x)$ då $3(x^2 + 5x + 6)y' = y^2 - y - 2$ och $y(1) = 3$. (6p)

   Lösning: $\displaystyle\frac{3y'}{y^2 - y - 2} = \frac{1}{x^2 + 5x + 6} \Rightarrow \int(\frac{1}{y-2} - \frac{1}{y+1})dy = \int(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3})dx \Rightarrow$ $\displaystyle\ln|\frac{y-2}{y+1}| = \ln|\frac{x+2}{x+3}| + C_1 \Rightarrow \frac{y-2}{y+1} = \frac{C(x+2)}{x+3}$. $y(1) = 3 \Rightarrow \frac{3C}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow C = \frac{1}{3} \Rightarrow$ $\displaystyle 3(y-2)(x+3) = (y+1)(x+2) \Rightarrow y = \frac{7x+20}{2x+7}$

   Svar: $y = \dfrac{35x + 73}{13x + 29}$.

4. Beräkna $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2\ln(\cos x) + x\sin x}{x^2 - (\arctan x)^2}$ (6p)

   Lösning: $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + x^5 B_1(x) \Rightarrow (\arctan x)^2 = (x - \frac{x^3}{3} + x^5 B_1(x))^2 = x^2 - \frac{2}{3}x^4 + x^6 B_2(x) \Rightarrow x^2 - (\arctan x)^2 = \frac{2}{3}x^4 - x^6 B_2(x)$

   $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^6 B_3(x) \Rightarrow \ln(\cos x) = \ln(1+t)$ där $t = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^6 B_3(x)$.

   $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + t^3 B_4(t) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^6 B_3(x) - \frac{1}{2}(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^6 B_3(x))^2 + (-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^6 B_3(x))^3 B_4(t) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2}\frac{x^4}{4} + x^6 B_5(x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + x^6 B_5(x)$

$x \sin x = x(x - \frac{x^3}{6} + x^5 B_6(x)) = x^2 - \frac{x^4}{6} + x^6 B_6(x).$

$\frac{2\ln(\cos x) + x\sin x}{x^2 - (\arctan x)^2} = \frac{-x^2 - \frac{x^4}{6} + x^2 - \frac{x^4}{6} + x^6 B_7(x)}{\frac{2}{3}x^4 - x^6 B_2(x)} = \frac{-\frac{x^4}{3} + x^6 B_7(x)}{\frac{2}{3}x^4 - x^6 B_2(x)} = \frac{-\frac{1}{3} + x^2 B_7(x)}{\frac{2}{3} - x^2 B_2(x)} \to$
$-\frac{1}{2}$ då $x \to 0$

Svar: Gränsvärdet $= -\frac{1}{2}$.

5. Låt n vara ett fixt heltal > 2. Bestäm $f(x)$ om $f(1) = 2$ och kurvan $y = f(x)$ skär alla kurvorna $x^n + y^n = C$ under rät vinkel. (6p)

   Lösning: Kurvskarans differentialekvation: $nx^{n-1} + ny^{n-1}y' = 0$.

   Ortogonalskarans diffeentialekvation: $nx^{(n-1)} - ny^{(n-1)}\frac{1}{y'} = 0$.

   Separabel ekvation. $\frac{y'}{y^{(n-1)}} = \frac{1}{x^{(n-1)}} \Rightarrow \int y^{(1-n)}dy = \int x^{(1-n)}dx \Rightarrow y^{(2-n)} = x^{(2-n)} + C$

   $y(1) = 2 \Rightarrow 2^{(2-n)} = 1 + C \Rightarrow y = (x^{(2-n)} + 2^{(2-n)} - 1)^{\frac{1}{2-n}}$

   Svar: $y = (x^{(2-n)} + 2^{(2-n)} - 1)^{\frac{1}{2-n}}$

6. Bestäm alla funktioner, $y = y(x)$, som satisfierar integral-differentialekvationen

   $\int_1^x (4t^3 + 12t^2)e^{t-x}y(t)dt = x^5 + 4x^3 y - x^4 y'$ (6p)

   Lösning: Multiplicera med e^x och derivera sedan ekvationen. Då erhålls differentialekvationen

   $(4x^3 + 12x^2)e^x y = e^x(x^5 + 4x^3 y - x^4 y' + 5x^4 + 12x^2 y + 4x^3 y' - 4x^3 y' - x^4 y'')$.

   Efter förenkling: $y'' + y' = x + 5$ som ger $y = C_1 e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 + 4x + C_2$.

   Insättning av $x = 1$ i ursprungsekvationen ger att $0 = 1 + 4y(1) - y'(1)$ varav följer att $C_2 = -\frac{14 + 5C_1 e^{-1}}{4}$

   Svar: $y = C_1 e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 + 4x - \frac{14 + 5C_1 e^{-1}}{4}$