Matematiska Institutionen
Chalmers Tekniska Högskola

Lösningar till tentamen i Matematik för M1/MX1,
Matematisk analys i en variabel, del B, 970822

1. (a) Bestäm lösningen till $(x^2+1)y' = x(y+1), \quad y(1) = 3.$ (4p)

   Lösning: Separabel ekvation: $(x^2+1)y' = x(y+1) \Leftrightarrow \{y \neq -1\} \Leftrightarrow$
   $\displaystyle\int \frac{dy}{y+1} = \int \frac{x\,dx}{x^2+1} \Leftrightarrow \ln|y+1| = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C \Leftrightarrow y+1 = C_1\sqrt{x^2+1},$
   $y(1) = 3 \Rightarrow C_1 = 2\sqrt{2} \Rightarrow y(x) = 2\sqrt{2(x^2+1)} - 1.$

   (b) Bestäm allmänna lösningen till $x_{n+3} - 7x_{n+1} - 6x_n = 12n - 8.$ (4p)

   Lösning: K.E.: $r^3 - 7r - 6 = 0$, har rötter $r_1 = -1, \quad r_2 = -2, \quad r_3 = 3$. Allmän lösning till homogena ekvationen är $x_n^{hom} = C_1(-1)^n + C_2(-2)^n + C_3 3^n$. Partikulärlösningsansats $x_n^{part} = An + B$ ger $A(n+3) + B - 7(A(n+1)+B) - 6(An+B) = 12n - 8 \Leftrightarrow -12An - 4A - 12B = 12n - 8 \Leftrightarrow A = -1, \quad B = 1$. Allmän lösning är $C_1(-1)^n + C_2(-2)^n + C_3 3^n - n + 1$.

2. Beräkna $\displaystyle\int_4^\infty \frac{(14x+18)dx}{x^3 - 7x - 6}$ (6p)

   Lösning: $\displaystyle\int_4^\infty \frac{(14x+18)dx}{x^3-7x-6} = \int_4^\infty \frac{(14x+18)dx}{(x+1)(x+2)(x-3)} = \int_4^\infty \left(\frac{3}{x-3} - \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x+2}\right) dx =$
   $\displaystyle[3\ln(x-3) - \ln(x+1) - 2\ln(x+2)]_4^\infty = \lim_{x\to\infty} \frac{(x-3)^3}{(x+1)(x+2)^2} + \ln 5 + 2\ln 6 = \ln 5 + 2\ln 6$

3. Lös differentialekvationen $y^{(3)} - 7y' - 6y = e^{-x} + x$ (6p)

   Lösning: K.E.: $r^3 - 7r - 6 = 0$, har rötter $r_1 = -1, \quad r_2 = -2, \quad r_3 = 3$. Allmän lösning till homogena ekvationen är $y_h = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + C_3e^{3x}$. Partikulärlösningsansats $y_p = Axe^{-x} + Bx + C$ ger $A(3-x)e^{-x} - 7(A(1-x)e^{-x} + B) - 6(Axe^{-x} + Bx + C) = e^{-x} + x \Leftrightarrow -4Ae^{-x} - 6Bx - 7B - 6C = e^{-x} + x \Leftrightarrow A = -\dfrac{1}{4}, \quad B = -\dfrac{1}{6}, \quad C = \dfrac{7}{36} \Rightarrow$
   $y(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + C_3e^{3x} - \dfrac{1}{4}e^{-x} - \dfrac{1}{6}x + \dfrac{7}{36}.$

4. Kurvan $y = f(x)$ är sådan att tangenten i punkten $(x, f(x))$ går genom punkten $\left(x + \cot x, \dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\cos x}\right)$.
   Kurvan går genom punkten $(0,1)$.
   Bestäm $f(x)$ för $-\pi/2 < x < \pi/2$. (6p)

   Lösning: Tvåpunktsformeln ger $y' = \dfrac{y - \left(\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}\right)}{x - (x + \cot x)}$ vilket förenklas till
   $y' + y\tan x = \dfrac{\cos x + \sin x}{\cos^2 x}$. Detta är en linjär ekvation med integrerande faktor
   $e^{\int \tan x\ dx} = \dfrac{1}{\cos x}$. Multiplikation med denna ger $\left(\dfrac{y}{\cos x}\right)' = \dfrac{1+\tan x}{\cos^2 x}$ och efter integrering
   $\dfrac{y}{\cos x} = \dfrac{1}{2}(1+\tan x)^2 + C$. Villkoret $y(0) = 1$ ger $C = \frac{1}{2}$ och $f(x) = \cos x + \sin x + \dfrac{1}{2}\tan x \sin x$.

5. Bestäm Maclaurinpolynomet av grad 4 till funktionen $\dfrac{\sqrt{1+\sin 2x}}{\cos x}$. (6p)

   Lösning: $\sin 2x = 2x - \dfrac{(2x)^3}{3!} + x^5B_1(x)$
   $\sqrt{1+t} = 1 + \dfrac{1}{2}t + \dfrac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2}t^2 + \dfrac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}t^3 + \dfrac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(\frac{1}{2}-3)}{4!}t^4 + t^5B_2(t) =$
   $1 + \dfrac{1}{2}t - \dfrac{1}{8}t^2 + \dfrac{1}{16}t^3 - \dfrac{5}{128}t^4 + t^5B_2(t)$
   $t = \sin 2x = 2x - \dfrac{4x^3}{3} + x^5B_1(x) \Rightarrow$
   $t^2 = (2x - \dfrac{4x^3}{3} + x^5B_1(x))^2 = 4x^2 - \dfrac{16x^4}{3} + x^5B_3(x),$

$t^3 = (2x - \frac{4x^3}{3} + x^5 B_1(x))^3 = 8x^3 + x^5 B_4(x),$
$t^4 = (4x^2 - \frac{16x^4}{3} + x^5 B_3(x))^2 = 16x^4 + x^5 B_5(x)$

$\sqrt{1+\sin 2x} = 1 + \frac{1}{2}(2x - \frac{4x^3}{3} + x^5 B_1(x)) - \frac{1}{8}(4x^2 - \frac{16x^4}{3} + x^5 B_3(x)) + \frac{1}{16}(8x^3 + x^5 B_4(x)) -$
$\frac{5}{128}(16x^4 + x^5 B_5(x)) + x^5 B_7(x)$
$= 1 + x - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{8}x^4 + x^5 B_8(x)$
$= 1 + x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + x^5 B_8(x)$

$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 B_9(t)$

$\cos(x) = 1 - (\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + x^6 B_{10}(x))$

$t = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + x^6 B_{10}(x) \Rightarrow$
$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + (\frac{1}{2}x^2)^2 + x^6 B_{11}(x) = 1 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + x^6 B_{11}(x)$
$\frac{\sqrt{1+\sin 2x}}{\cos x} = (1 + x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + x^5 B_8(x))(1 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + x^6 B_{11}(x)) =$
$1 + x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{7}{12}x^3 - \frac{3}{8}x^4 + x^5 B(x)$

Maclaurinpolynomet av grad 4 till $\frac{\sqrt{1+\sin 2x}}{\cos x}$ är $1 + x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{7}{12}x^3 - \frac{3}{8}x^4$.

6. Två tankar, tank 1 och tank 2, innehåller från början 1000 liter rent vatten vardera. Mellan de två tankarna går två rör i vilka vätska kan pumpas från tank1 till tank 2 och omvänt. Vid en viss tidpunkt, $t = 0$, börjar man till tank 1 tillföra 3% -ig saltlösning med en hastighet av 50 l/min. Samtidigt förs den perfekt blandade vätskan från tank 1 till tank 2 med en hastighet av 90 l/min. Från tank 2 pumpas den där perfekt blandade vätskan dels tillbaka till tank 1 med en hastighet av 40 l/min, dels ut i avloppet med en hastighet av 50 l/min. Bestäm saltmängden i respektive tank vid tidpunkten $t > 0$. (6p)

Lösning: Saltmängden i respektive tank betecknas $m_1(t)$ och $m_2(t)$. Dessa skall då satisfiera följande system av differentialekvationer.

$$\begin{cases} m_1' &= 0.03 * 50 - 0.001 * m_1 * 90 + 0.001 * m_2 * 40 \\ m_2' &= 0.001 * m_1 * 90 - 0.001 * m_2 * 90 \end{cases}$$

Eliminerig ger

$$\begin{cases} m_1 = m_2 + \frac{1}{0.09}m_2' \\ m_2'' + 0.18m_2' + 0.0045m_2 = 0.135 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 &= 30 - \frac{2}{3}C_1 e^{-0.15t} + \frac{2}{3}C_2 e^{-0.03t} \\ m_2 &= 30 + C_1 e^{-0.15t} + C_2 e^{-0.03t} \end{cases}$$

Begynnelsevillkoren $m_1(0) = 0, \quad m_2(0) = 0$ ger

$$\begin{cases} 30 - \frac{2}{3}C_1 + \frac{2}{3}C_2 &= 0 \\ 30 + C_1 + C_2 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 &= 7.5 \\ C_2 &= -37.5 \end{cases} \text{ och slutligen}$$

$$\begin{cases} m_1 &= 30 - 5e^{-0.15t} - 25e^{-0.03t} \\ m_2 &= 30 + 7.5e^{-0.15t} - 37.5e^{-0.03t} \end{cases}$$