Läsanvisningar för Fourieranalys

Kursbok är Folland, Fourier analysis and its applications. Här skall innehållet i de olika kapitlen diskuteras och anges vilka avsnitt som är centrala och vilka som kan läsas mer översiktligt. Kapitel 1 börjar med en diskussion av fysikens partiella differentialekvationer. Detta bör vara bekant från annat sammanhang och kan därför läsas kursivt (gäller avsnitt 1.1–1.2). Avsnitt 1.3 är däremot ytterst centralt, ty där presenteras de grundläggande principerna för variabelseparationsmetoden. Det framgår att vi måste kunna utveckla funktioner i olika typer av serier. Detta är sedan ett genomgående tema i resten av boken. Ett första exempel är utvecklingen av periodiska funktioner i trigonometriska Fourierserier (Kapitel 2). Detta har ju studerats redan tidigare i kursen "Linjär algebra och analys", och det mesta av innehållet i avsnitt 2.1 bör därför vara välbekant. Den komplexa versionen (2.2) är kanske ny. Kontrollera därför hur de två formerna på Fourierserien kan översättas i varandra; sambandet mellan koefficienterna ges av (2.3) och (2.4). Bessels olikhet på sid. 30 förutsätts bekant sedan tidigare, men i Kapitel 3 kommer att framgå att den är ett specialfall av en allmännare sats. Notera speciellt Corollary 2.1. Den viktigaste satsen i Kapitel 2 är konvergenssatsen Theorem 2.1. För konvergensen i kontinuitetspunkter kan man ge ett enklare bevis än i boken. Detta skall presenteras här. Först ett litet lemma rörande de komplexa Fourierkoefficienterna c_n och hur de beror på funktionen f.

Lemma 2.5. *Låt* $c_n = c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-in\theta}\,d\theta$. *Då gäller*

(a) $c_n(\alpha f + \beta g) = \alpha c_n(f) + \beta c_n(g), \quad \alpha, \beta$ *konstanta.*

(b) $c_n(1) = \delta_{n0} = \begin{cases} 0, & n \neq 0, \\ 1, & n = 0. \end{cases}$

(c) $c_n(e^{ik\theta} f) = c_{n-k}(f), \quad k$ *heltal.*

Bevis. (a) och (b) uppenbara. (c):

$$c_n(e^{ik\theta}f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\theta} f(\theta)e^{-in\theta}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-i(n-k)\theta}d\theta = c_{n-k}(f). \qquad \blacksquare$$

Bevis för Theorem 2.1 i kontinuitetspunkter. Antag att f är kontinuerlig i θ_0. Sätt

$$g(\theta) = \frac{f(\theta) - f(\theta_0)}{e^{i\theta} - e^{i\theta_0}}.$$

Funktionen g har samma kontinuitetsegenskaper som f då $\theta \neq \theta_0$, och vidare har $g(\theta)$ höger- och vänstergränsvärden i θ_0. Vi har nämligen enligt l'Hospitals regel

$$\lim_{\theta \to \theta_0^+} g(\theta) = \lim_{\theta \to \theta_0^+} \frac{f'(\theta)}{ie^{i\theta}} = \frac{f'(\theta_0^+)}{ie^{i\theta_0}}, \quad \lim_{\theta \to \theta_0^-} g(\theta) = \frac{f'(\theta_0^-)}{ie^{i\theta_0}}.$$

Alltså är g styckvis kontinuerlig, och enligt en följdsats till Bessels olikhet (Corollary 2.1) gäller då att $c_n(g) \to 0$ då $n \to \pm\infty$. Vi skriver

$$f(\theta) = f(\theta_0) + e^{i\theta}g(\theta) - e^{i\theta_0}g(\theta).$$

Enligt Lemma 2.5 är

$$c_n(f) = f(\theta_0)c_n(1) + c_n(e^{i\theta}g) - e^{i\theta_0}c_n(g) = f(\theta_0)\delta_{n0} + c_{n-1}(g) - e^{i\theta_0}c_n(g).$$

Med $d_n = c_{n-1}(g)e^{in\theta_0}$ får vi för Fourierseriens delsummor i punkten θ_0

$$\begin{aligned}
S_N^f(\theta_0) &= \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{in\theta_0} = \sum_{n=-N}^{N} f(\theta_0)e^{in\theta_0}\delta_{n0} + \sum_{n=-N}^{N} \big(c_{n-1}(g)e^{in\theta_0} - c_n(g)e^{i(n+1)\theta_0}\big) \\
&= f(\theta_0) + \sum_{n=-N}^{N} (d_n - d_{n+1}) \\
&= f(\theta_0) + d_{-N} - d_{-N+1} + d_{-N+1} - d_{-N+2} + \cdots + d_{N-1} - d_N + d_N - d_{N+1} \\
&= f(\theta_0) + d_{-N} - d_{N+1}.
\end{aligned}$$

Men enligt ovan har vi att

$$|d_n| = |c_{n-1}(g)| \to 0 \text{ då } n \to \pm\infty.$$

Alltså gäller att $d_{-N} \to 0$ och $d_{N+1} \to 0$ då $N \to \infty$, dvs.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)e^{in\theta_0} = \lim_{N\to\infty} S_N^f(\theta_0) = f(\theta_0). \qquad \blacksquare$$

I avsnitt 2.3 studeras i första hand satserna 2.2–2.4 om hur Fourierserier deriveras och integreras. Läs i avsnitt 2.4 om Fouriercosinus- och Fouriersinusserier erhållna genom jämn resp. udda utvidgning. För allmänna intervall är de relevanta formlerna (2.20)–(2.24). ”These formulas are probably worth memorizing”, för att citera från sid. 43. I avsnitt 2.5 tas tråden från Kapitel 1 upp och diskuteras lösningen i några typiska fall. Detta kan läsas kursivt.

Vi vill nu fortsätta med Fouriertransformer i Kapitel 7, men dessförinnan behövs viss grundläggande terminologi från början på Kapitel 3. Avsnitten 3.1 och 3.2 innehåller inget som inte redan är känt från Linjär algebra. Därför bör det räcka med en snabb genomläsning för att fastlägga definitioner och terminologi. Det centrala är definitionen av skalärprodukt eller inre produkt i (3.3) och (3.4). Observera varningen några rader längre upp rörande vilken faktor som konjugeras. Begrunda ”Important Remark” på sid. 65. Studera begreppet konvergens i norm på sid. 72 och begreppet $L^2(a,b)$ på sid. 74. Vi skall dock inte fördjupa oss i Lebesgueintegrerbara funktioners egenskaper; i de flesta sammanhang räcker det att tänka på styckvis kontinuerliga funktioner. Satsen om dominerad konvergens på sid. 83 är dock nyttig.

I Kapitel 7 kan det vara bra att först läsa igenom inledningen på sid. 204–205. Gå därefter till avsnitt 7.2 och läs om Fouriertransformens definition och grundläggande egenskaper jämte några viktiga exempel på sid. 213–216. I anslutning till Theorem 7.5(d) kan man läsa om faltning på sid. 206–207. Inversionssatsen finns i olika varianter; vi skall studera satsen på sid. 218 (med bevis) och Theorem 7.6 (utan bevis). För återstoden av 7.2 räcker det att konstatera att Fouriertransformen kan utsträckas till L^2, varvid de grundläggande egenskaperna förblir giltiga. Nu tillkommer också Plancherels sats. I avsnitt 7.3 läses om hur Fouriertransform kan användas för att lösa partiella differentialekvationer. Tillämpningar på signalanalys finns redan behandlade i ”Tillämpningar av komplex analys och Fourieranalys”. Där ges även ett alternativt bevis till samplingsteoremet. Läs definitionen av Fouriercosinus- och Fouriersinustransformen på sid. 238 med tillhörande inversionsformler i (7.28). Läs i avsnitt 7.6 om den diskreta Fouriertransformen, inklusive snabb Fouriertransform (FFT) för numeriska beräkningar.

Den allmänna teorin för ortogonalsystem i avsnitten 3.3 och 3.4 kan med fördel utgå från projektionssatsen sådan den är känd från Linjär algebra (jfr Corollary 2.1, sid. 85): Låt $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$

varavara en ortonormalmängd (t.ex. i $PC(a,b)$ eller $L^2(a,b)$), och låt U vara underrummet genererat av $\varphi_1,\ldots,\varphi_N$. För godtyckligt f gäller att den bästa approximationen av f med en funktion i U är $\tilde{f} = \sum_{n=1}^{N}\langle f,\varphi_n\rangle\varphi_n$. Det gäller att $f-\tilde{f}$ är ortogonal mot U, och

$$\|f-\tilde{f}\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{n=1}^{N} |\langle f,\varphi_n\rangle|^2 \, . \tag{$*$}$$

Formel $(*)$ bevisas med en upprepad användning av Pythagoras sats. Ur $(*)$ följer sedan direkt dels Bessels olikhet, dels ekvivalensen mellan (b) och (c) i Theorem 3.4. Det är bara för implikationen (a) $\Rightarrow$ (b) i Theorem 3.4 som man behöver utnyttja fullständigheten hos $L^2(a,b)$. Närmare bestämt behövs Lemma 3.2 som garanterar att $\sum_{n=1}^{\infty}\langle f,\varphi_n\rangle\varphi_n$ alltid konvergerar i $L^2(a,b)$. Theorem 3.5 ges utan bevis.

I avsnitt 3.5 går vi direkt på definitionen av ett regulärt Sturm-Liouville-problem med separerade randvillkor. Vi bevisar sedan Theorem 3.9 med hjälp av de relevanta kalkylerna på sid. 87–88. Theorem 3.10 formuleras.

Kapitel 4 är centralt. Här används den tidigare teorin för att lösa diverse randvärdesproblem för partiella differentialekvationer. Läs noga avsnitt 4.1, som presenterar några användbara metoder för att hantera icke-homogena problem.

Vid variabelseparation i cylinderkoordinater erhålles ofta Besselfunktioner. Dessa studeras i Kapitel 5. Där går vi igenom inledningen och avsnitten 5.1, 5.2, 5.4 (inget bevis för Lemma 5.3) och tillämpningarna i avsnitt 5.5. Kort orientering om funktionerna I_ν och K_ν i avsnitt 5.6.

Bland de viktigaste exemplen på ortogonala funktionssystem märks ortogonala polynom. Vi skall särskilt studera Legendre-, Hermite- och Laguerrepolynom, vilka är av betydelse vid lösandet av vissa partiella differentialekvationer (Laplaces ekvation och Schrödingerekvationen). Dessa polynom har många gemensamma egenskaper: de definieras av en Rodrigues formel, de är lösningar till ett egenvärdesproblem av Sturm-Liouville-typ, de satisfierar en andra ordningens differensekvation (eller rekurrensekvation), det finns en genererande funktion. I Kapitel 6 ingår inledningen av avsnitt 6.1, och i avsnitt 6.2 ingår Theorem 6.1, Theorem 6.2 och Theorem 6.5 (utan bevis). I avsnitt 6.3 genomförs variabelseparation i sfäriska koordinater ledande till (6.17), men i fortsättningen behandlas mest fallet $m = 0$ (φ-oberoende lösning; observera att Folland använder θ i stället för φ och tvärtom), vilket leder till en lösningsansats av formen

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}(A_n r^n + B_n r^{-n-1})P_n(\cos\theta).$$

Kort orientering om klotytfunktionerna Y_{mn}. Ett urval satser om Hermite- och Laguerrepolynom: Theorem 6.11, 6.13 och 6.15 (bevis för ortogonalitet och norm).

I Kapitel 9 studeras distributioner (eller generaliserade funktioner) och motiveras många av de formella kalkyler vi gjort i tidigare avsnitt. Vi begränsar oss till introduktionen i avsnitt 9.1 och litet om svag konvergens (Theorem 9.3 och impulståg i avsnitt 9.3).