TMA132 Fourieranalys F2/Kf2, 5 poäng

OBS! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

1. Låt fuktionen f definieras av

$$f(x) = \int_0^2 e^{ix\xi}/(1+\xi)\, d\xi.$$

Beräkna

$$(a) \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx \qquad (b) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(x)\, dx. \qquad (6p)$$

2. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = y, & x > 0, \quad 0 < y < 1, \\ u(x,0) = u(x,1) = 0, & x > 0, \\ u(0,y) = y - y^3, & 0 < y < 1, \\ u \quad \text{begränsad} & \text{då } x \to \infty. \end{cases} \qquad (6p)$$

3. Funktionen $f(\theta)$ är 2π-periodisk, och $f(\theta) = |\theta|$ för $-\pi < \theta < \pi$. Utveckla f i komplex Fourierserie. Bestäm sedan en 2π-periodisk lösning till ekvationen

$$y'' + 2y = f. \qquad (6p)$$

4. Definiera för $k \in \mathbb{Z}$ funktionen u_k på $\mathbb{R}$ genom $u_k(x) = e^{-ikx}$ om $x \in (-\pi, \pi)$, $u_k(x) = 0$ annars. Låt sedan $\hat{u}_k(\xi)$ vara Fouriertransformen av u_k. Beräkna

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{u}_k(\xi)|^2. \qquad (6p)$$

Ledning: Uppfatta $\hat{u}_k(\xi)$ som Fourierkoefficienter av en viss funktion.

5. Lös Laplaces ekvation $\Delta u = 0$ i området $0 < \theta < \pi/2$, $1 < r < a$ (polära koordinater i planet), med randvillkoren

$$\begin{cases} u(1,\theta) = u(a,\theta) = 0, & 0 < \theta < \pi/2, \\ u(r,0) = 0, & 1 < r < a, \\ u(r,\pi/2) = c, & 1 < r < a. \end{cases} \qquad (6p)$$

6. En lång, rät cirkulär cylinder är delad på längden i två halvor an ledande material isolerade från randen. Den ena halvan är jordad och den andra hålls vid den konstanta potentialen Φ_0. Bestäm potentialen $\Phi(x,y)$ i en godtycklig punkt (x,y) inuti cylindern. Bestäm de ekvipotentiala kurvorna. (6p)

7. Visa att

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) z^n = \exp\Big[\frac{x}{2}\Big(z - \frac{1}{z}\Big)\Big], \qquad \forall x, \quad \forall z \neq 0. \qquad (7p)$$

8. Härled differentialekvationen för Legendrepolynomen. (7p)