Stegfunktioner och Impulsfunktioner

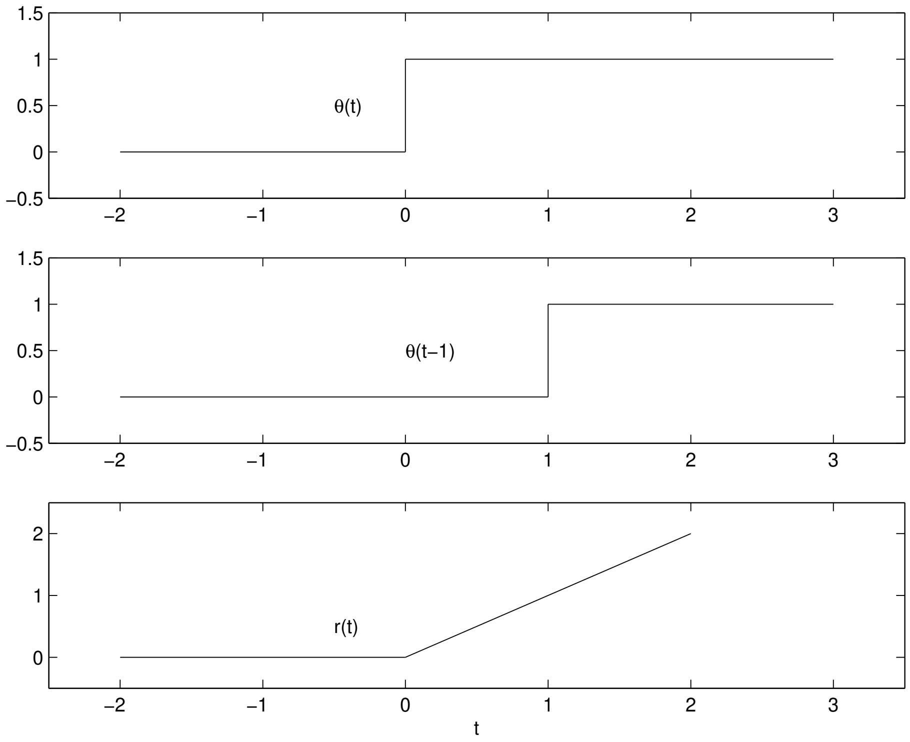
I. Steg funktioner

Definition: Heavisides *stegfunktionen* $\theta(t)$ definieras enligt:

$$\theta(t) = \begin{cases} 0 & \text{för} \quad t < 0 \\ 1 & \text{för} \quad t \geq 0. \end{cases}$$

Observera att

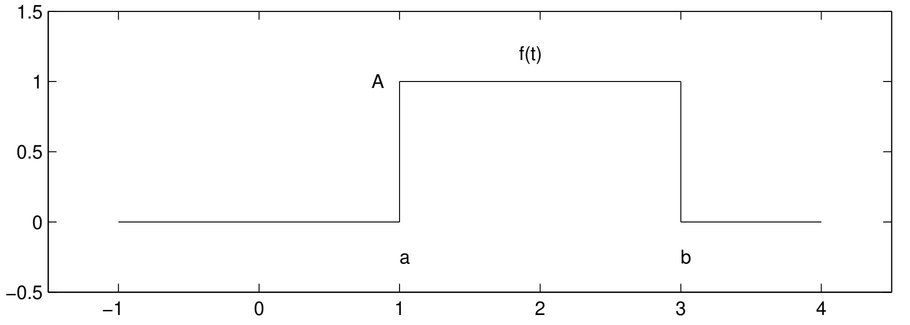
$$(1) \quad \theta(t-T) = \begin{cases} 0, & \text{för} \quad t < T \\ 1, & \text{för} \quad t \geq T, \end{cases} \qquad \text{och} \qquad (2) \quad r(t) := t\theta(t) = \begin{cases} 0, & \text{för} \quad t < 0 \\ t, & \text{för} \quad t \geq 0. \end{cases}$$

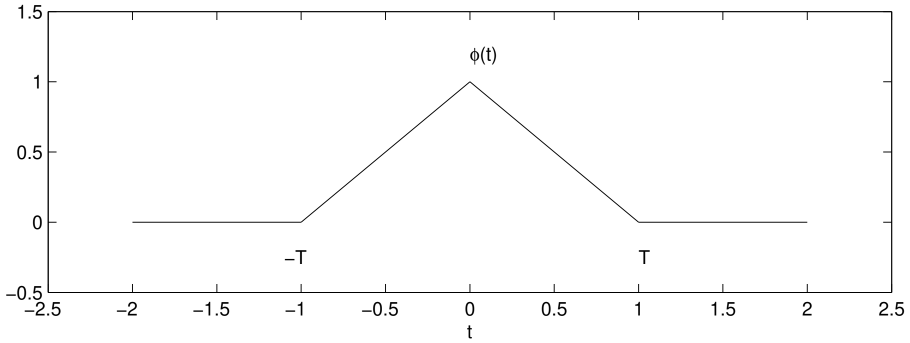


$$(3) \quad r(t) = \int_{-\infty}^{t} \theta(\tau)d\tau, \qquad \text{och} \qquad (3)' \quad r'(t) = \theta(t).$$

Anm. Med hjälp av θ-funktionen kan vi skriva enkla analytiska uttryck för funktioner som har olika värden i olika intervaller.

Exempel 1. Fyrkantpulsen $f(t) = \begin{cases} A, & \text{för} \quad t \in (a,b) \\ 0, & \text{för} \quad t \notin (a,b) \end{cases}$ med amplituden A kan skrivas som $f(t) = A[\theta(t-a) - \theta(t-b)]$





Exempel 2. *Hat funktionen* (på bildan ovan): $\varphi(t) = \begin{cases} 1 + \frac{t}{T} & \text{för} \quad -T \leq t \leq 0 \\ 1 - \frac{t}{T} & \text{för} \quad 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{för} \quad t \notin [-T, T], \end{cases}$

kan skrivas som

$$\begin{aligned} g(t) &= \Big(1 + \frac{t}{T}\Big)[\theta(t+T) - \theta(t)] + \Big(1 + \frac{t}{T}\Big)[\theta(t) - \theta(t-T)] \\ &= \underline{\Big(1 + \frac{t}{T}\Big)\theta(t-T) - \frac{2t}{T}\theta(t) - \Big(1 - \frac{t}{T}\Big)\theta(t-T)} \end{aligned}$$

Integrationsregel: *Avskurna funktionen* $f(t)\theta(t-T)$ uppfyller

(IR) $\displaystyle\int f(t)\theta(t-T)dt = [F(t) - F(T)]\theta(t-T) + C,$

där $F(t)$ är en primitiv funktion till $f(t)$, och C är konstant. Till exempel

$$\int (t-T)^P \theta(t-T)dt = \frac{(t-T)^{p+1}}{p+1}\theta(t-T) + C, \quad p > -1.$$

Exempel 3.

$$\int_{-2}^{2}[\theta(t+3)-2t\theta(t-1)]dt :\equiv \int_{-2}^{2} f(t)\theta(t+3)dt - \int_{-2}^{2} g(t)\theta(t-1)dt$$
$$= \left\{ \begin{array}{l} f(t)=1 \Rightarrow F(t)=t \\ T_1=-3 \Rightarrow F(-3)=-3 \end{array} \wedge \begin{array}{rl} g(t)=2t & \Rightarrow G(t)=t^2 \\ T_2=1 & \Rightarrow G(T_2)=G(1)=1 \end{array} \right\}$$
$$= \Big[(t+3)\theta(t+3)-(t^2-1)\theta(t-1)\Big]_{-2}^{2} = 5\theta(5)-3\theta(1)-\theta(+1)+3\theta(-3)=1.$$

Exempel 4.

$$\int \frac{\theta(1-t)}{1+t^2}dt = \{\theta(x)=1-\theta(-x)\} = \int \frac{1-\theta(t-1)}{1+t^2}dt = \int \frac{dt}{1+t^2} - \int \frac{\theta(t-1)}{1+t^2}dt$$
$$= \left\{ \begin{array}{l} f(t)=\frac{1}{1+t^2} \Rightarrow F(t)=\arctan(t) \\ T=1 \Rightarrow F(1)=\arctan(1)=\frac{\pi}{4} \end{array} \right\} = \arctan(t) - [\arctan(t)-\frac{\pi}{4}]\theta(t-1)+C.$$

Övningar.

1. Rita grafen till följande funktioner

   a) $2\theta(t-1)$ b) $2\theta(1-t)$ c) $t\theta(t-1)$
   d) $t[\theta(t)-\theta(t-1)]$ e) $e^{-t}\theta(t)$ f) $t(t+1)[\theta(t+1)-\theta(2t)]$.

2. Lös följande differentialekvationer. Använd integrationsregeln (IR)

   a) $y'=t\theta(t-1)$ b) $y''=|t|$ c) $y'+y=|t|$ d) $\left\{ \begin{array}{l} 2xy'+y=2x\theta(x-4) \\ y(1)=3. \end{array} \right.$

Svar.

1.

2. Med $A,\ B,$ och C konstanter har vi

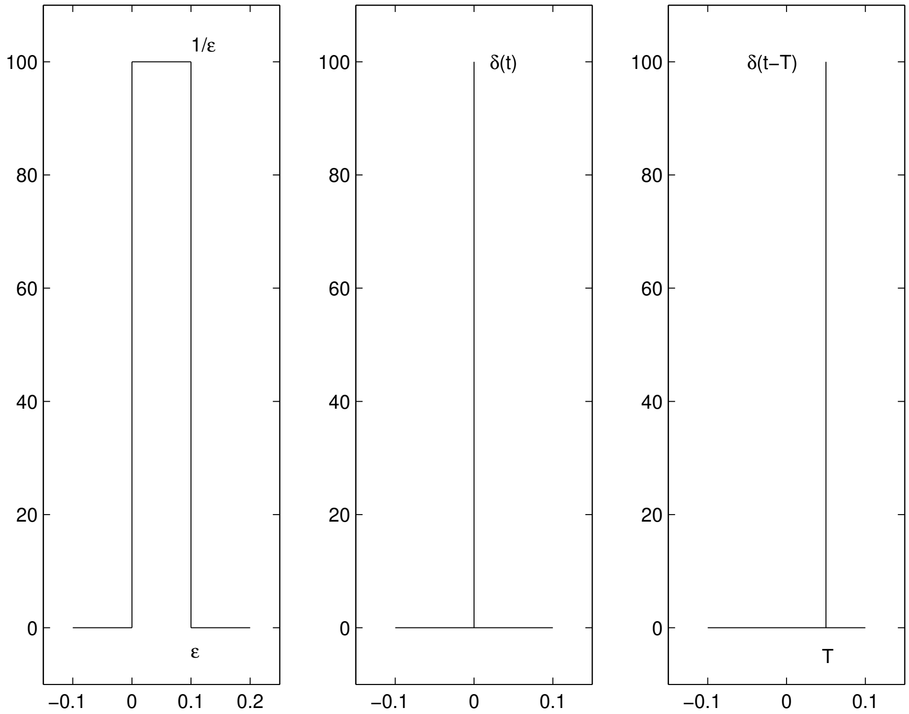
   a) $y=\frac{1}{2}(t^2-1)\theta(t-1)+C$ b) $y=\frac{1}{3}t^3\theta(t)-\frac{1}{6}t^3+At+B$
   c) $y=Ce^{-t}+2(t-1+e^{-t})\theta(t)-t-1$ d) $y=3x^{-1/2}+\frac{2}{3}(x-8x^{-1/2})\theta(x-4)$

II. Impulsfunktioner

Betrakta *Fyrkantpulsen* $\delta_\varepsilon(t) := \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & 0 \le t \le \varepsilon \\ 0 & t \notin [0, \varepsilon] \end{cases}$ Observera att δ_ε satisfierar

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(t)dt = 1.$$

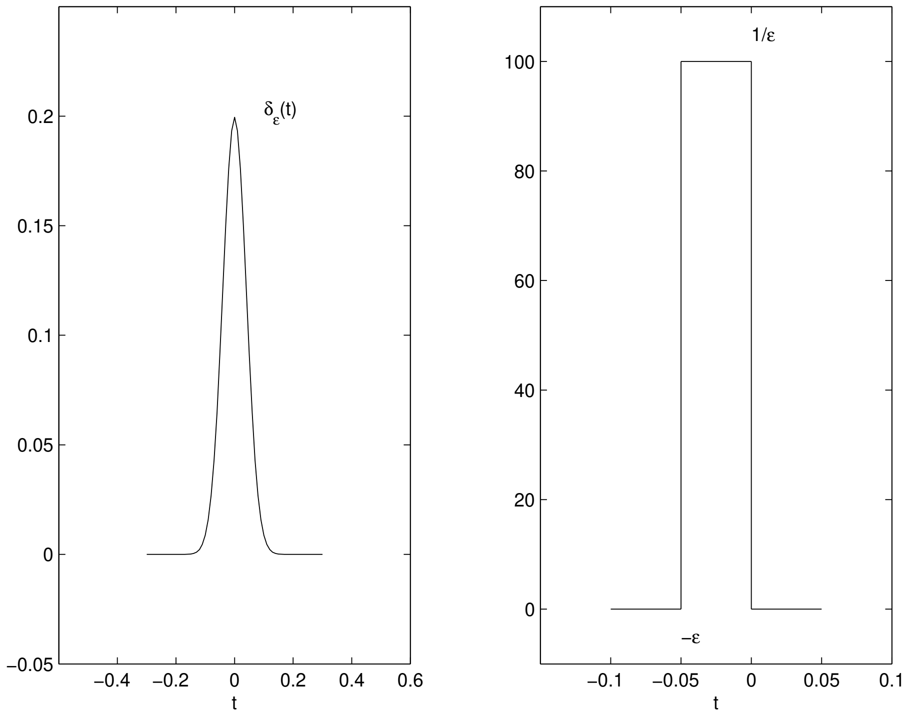
Definition: *Diracs deltafunktion* definieras som $\delta(t) = \lim_{\epsilon \to 0} \delta_\varepsilon(t)$.



Vi har att

$$(1) \quad \delta(t) = 0 \text{ för } t \neq 0, \qquad \text{och} \qquad (2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1.$$

Anm. $\delta_\varepsilon(t)$ kan också beskrivas m.h.a. Gauss-pulserna $\delta_\varepsilon(t) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2\varepsilon^2}, \varepsilon > 0$.



Villkor hos deltafunktioner:

(V1) δ är en jämn funktion: $\delta(-t) = \delta(t)$, $\qquad \Big(\Rightarrow \delta(T-t) = \delta(t-T) \Big)$.

(V2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau) d\tau = \theta(t), \qquad t \neq 0,$

(V3) $\delta(t) = \dfrac{d}{dt}\theta(t), \qquad \Big(= \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\theta(t+\varepsilon) - \theta(t)}{\varepsilon} = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(t) = \delta(t),$ se figuren ovan$\Big)$.

(V4) *Evalueringen:*

$$f(t)\delta(t-T) = f(T)\delta(t-T), \quad f \text{ är godtycklig kontinuerlig funktion.}$$

(V4)$^\circ$ $\qquad f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t). \qquad$ (V4)$^\circ$ fås ur (V4) om $T = 0$.

(V4)$'$ $\qquad f(t)\delta'(t-T) = f(T)\delta'(t-T) - f'(T)\delta(t-T).$

(V4)$'$ fås ur (V4) genom derivering:

$$[f(t)\delta(t-T)]' = [f(T)\delta(t-T)]' \Leftrightarrow f'(t)\delta(t-T) + f(t)\delta'(t-T) = f(T)\delta'(t-T).$$

■

Exempel 1.

$$\int_1^\infty (t^2+2)\delta(t)dt = \{\text{evaluering}\} = \int_1^\infty 2\delta(t)dt = 0,$$
$$\int_{-1}^\infty (t^2+2)\delta(t)dt = \{\text{evaluering}\} = \int_{-1}^\infty 2\delta(t)dt = 2.$$

Men

$$\int_0^\infty (t^2+2)\delta(t)dt \quad \text{har vi inte definierat.}$$

Däremot är

$$\int_{0_+}^\infty (t^2+2)\delta(t)dt = \lim_{\alpha\to 0^+}\int_\alpha^\infty (t^2+2)\delta(t)dt = 0$$
$$\int_{0_-}^\infty (t^2+2)\delta(t)dt = \lim_{\alpha\to 0_+}\int_{-\alpha}^\infty (t^2+2)\delta(t)dt = 2.$$

Exempel 2.

$$\int_a^b \delta'(t)dt = [\delta(t)]_a^b = \delta(b)-\delta(a) = 0-0 = 0 \text{ om } a \neq 0 \quad \text{och } \ b \neq 0.$$

Om a eller $b = 0$, så är integralen inte definierad.

Exempel 3.

$$\int_{-5}^\infty t^2\delta'(t+3)dt = [PI] = [t^2\delta(t+3)]_{-5}^\infty - \int_{-5}^\infty 2t\delta(t+3)dt = 0 - \int_{-5}^\infty 2(-3)\delta(t+3) = 6.$$

■

Exempel 4. Lös differentialekvationen:

$$y''+y = \text{sign}(x); \qquad \text{sign}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} -1 & x<0 \\ 1 & x>0 \end{array} \right\} = 2\theta(x)-1$$

Lösning: Homogen lösning y_h: löser $y_h''+y_h = 0$ som har karakteristiska ekvationen

$r^2+1=0$. Dvs $r=\pm i$ och vi har $y_h(x) = C_1e^{ix}+C_2e^{-ix} \Rightarrow \boxed{y_h(x) = A\sin(x)+B\cos(x)}$

En partikulärlösning y_p svarande mot högerledet (HL) $\text{sign}(x) = 2\theta(x)-1$ består av summan av två partikulära lösningar y_{p_1} & y_{p_2} som uppfyller: $y_{p_1}''+y_{p_1} = -1$ respektive $y_{p_2}''+y_{p_2} = 2\theta(x)$. Vi har att $y_{p_1} = \text{konstant} = -1$ och y_{p_2} är av formen $y_{p_2} = u(x)\theta(x)$.

Insättning i y_{p_2}'s ekvation ger

$$\begin{aligned}
y''_{p_2} + y_{p_2} =& \Big(u'(x)\theta(x) + u(x)\delta(x)\Big)' + u(x)\theta(x) = 2\theta(x) \Leftrightarrow \\
& \Big(u'(x)\theta(x) + u(0)\delta(x)\Big)' + u(x)\theta(x) = 2\theta(x) \Leftrightarrow \\
& u''(x)\theta(x) + u'(0)\delta(x) + u(0)\delta'(x) + u(x)\theta(x) = 2\theta(x) \\
& \Leftrightarrow (u'' + u)\theta(x) + u'(0)\delta(x) + u(0)\delta'(x) = 2\theta(x).
\end{aligned}$$

Identifiering av koefficienter ger

$$\begin{cases} u'' + u = 2 \\ u'(0) = u(0) = 0 \end{cases}$$

Lösningen är $u(x) = 2 - 2\cos(x)$. (Ansätt! $u(x) = A\sin(x) + B\cos(x) + C$).

Varför $y = y_p + y_h = y_{p_1} + y_{p_2} + y_h = \underline{-1 + (2 - 2\cos(x))\theta(x) + A\sin(x) + B\cos(x)}$.

Övningar.

1. Beräkna $f(t)\delta''(t-T)$, då $f(t)$ har kontinuerlig andraderivata.

2. Beräkna

   $a)$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (e^{-2t} + \sin t)\delta(t)dt,$ $\qquad b)$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} [\delta(t-1) - \delta(t+1)]e^{-i\xi t}dt,$

   $c)$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \{\sin\tau + 2e^{\tau}\}\delta(t-\tau)d\tau,$ $\qquad d)$ $\displaystyle\int_{a}^{2} e^{-2t}\delta'(t)dt,\ \ a = +1, a = -1,$

   $e)$ $\displaystyle\int_{0}^{\infty} e^{-st}\delta(t-T)dt,$ $\qquad f)$ $\displaystyle\int_{a}^{\infty} e^{-st}\delta(t)dt,\ \ a \to 0^-,\ \ a \to 0^+,\ \ a = 0.$

3. Lös följande differentialekvationer.

   a) $y' = 2t + \delta(t),\ \ y(1) = -1,$ $\qquad$ b) $y'' = t\delta(t-T),$
   c) $y' + ay = \delta(t-T),$ $\qquad$ d) $y' + 2y = (t+2)\delta(t+3),\quad y(-1) = 1,$
   e) $y'' + y' = \theta(x) + \delta(x),$ $\qquad$ f) $y'' - y = \delta''(x).$

Svar.

1. $f(T)\delta''(t-T) - 2f'(T)\delta'(t-T) + f''(T)\delta(t-T).$

2. Vi har att

   a) 1, b) $-2i\sin\xi$, c) $\sin t + 2e^t$, d) $0,\ a=1,\ 2,\ a=-1$,
   e) e^{-sT} då $T>0$, 0 då $T<0$, odefinierad då $T=0$, f) $1,\ 0$, resp. odefinierad.

3. Med $A,\ B$, och C konstanter

   a) $y = t^2 - 3 + \theta(t)$, b) $y = T(t-T)\theta(t-T) + At + B$,
   c) $y = \{C + \theta(t-T)\}e^{a(T-t)}$, d) $y = \{e^4 + 1 - \theta(t+3)\}e^{-2t-6}$,
   e) $y = A + Be^{-x} + x\theta(x)$, f) $y = Ae^x + Be^{-x} + \theta(x)\sinh x + \delta(x)$.