Lösningar, TMA132 Fourieranalys F2/Kf2, 5 poäng; 2002–03–09

---

1. Vi har att

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \operatorname{sign}(t)e^{-|t|} \Longrightarrow \hat{x}_1(t) = \tfrac{-2i\xi}{1+\xi^2}. \\ y_1(y) &= t\operatorname{sign}(t)e^{-2|t|} \Longrightarrow \hat{y}_1(t) = i\tfrac{d}{d\xi}\left(\tfrac{-2i\xi}{4+\xi^2}\right) = i\tfrac{-2i(4+\xi^2)-(-2i\xi)(2\xi)}{(4+\xi^2)^2} \\ &= i(-2i)\tfrac{4+\xi^2-2\xi^2}{(4+\xi^2)^2} = 2\tfrac{4-\xi^2}{(4+\xi^2)^2}. \end{aligned}$$

Detta ger överföringsfuktionen

$$\hat{h}(\xi) = \frac{\hat{y}_1(t)}{\hat{x}_1(t)} = 2\frac{4-\xi^2}{(4+\xi^2)^2} \times \frac{1+\xi^2}{-2i\xi} = \frac{i}{\xi}\cdot\frac{(4-\xi^2)(1+\xi^2)}{(4+\xi^2)^2}.$$

Komplexa Fourierserieutvecklingen av den 2π periodiska $x(t) = \pi - t$ ges av

$$x(t) = \pi - t \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{int},$$

där för $n \neq 0$, är

$$\begin{aligned} C_n &= \tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi-t)e^{-int}\,dt = \tfrac{1}{2\pi}\left[(\pi-t)\tfrac{e^{-int}}{-in}\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}(-1)\tfrac{e^{-int}}{-in}\,dt\right] \\ &= \tfrac{1}{2\pi}\left[-\pi\tfrac{e^{-in(2\pi)}}{-in} - \tfrac{\pi}{-in} + \tfrac{e^{-int}}{(-in)^2}\Big|_0^{2\pi}\right] = \tfrac{1}{2\pi}\left[\tfrac{-\pi}{-in} + \tfrac{-\pi}{-in}\right] \\ &= \tfrac{1}{2\pi}\tfrac{2\pi}{in} = \tfrac{1}{in} = \tfrac{-i}{n}, \quad n \neq 0. \end{aligned}$$

För $n = 0$, är

$$C_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi-t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\frac{(\pi-t)^2}{-2}\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\pi^2}{-2} - \frac{\pi^2}{-2}\right] = 0.$$

Nu

$$e^{i\xi t} \curvearrowright \hat{h}(n)e^{i\xi t} \Longrightarrow e^{int} \curvearrowright \hat{h}(\xi)e^{int},$$

värför för $n \neq 0$ gäller att

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{int} = \sum_{n=-\infty (n\neq 0)}^{\infty} \frac{-i}{n}e^{int} \curvearrowright \sum_{n=-\infty (n\neq 0)}^{\infty} \frac{-i}{n}\hat{h}(n)e^{int} = y(t).$$

Alltså

$$y(t) = \sum_{n=-\infty (n\neq 0)}^{\infty} \frac{-i}{n}\cdot\frac{-i}{n}\frac{(4-n^2)(1+n^2)}{(4+n^2)^2}e^{int}.$$

Dvs svaret är

$$y(t) = \sum_{n=-\infty (n\neq 0)}^{\infty} \frac{(n^2-4)(n^2+1)}{n^2(n^2+4)^2}e^{int}.$$

2. Avbildningen $w = z^4$, $z = x + iy$ avbildar D på övre halvplanet. Sätt $w = u + iv$, vi skall nu bestämma en funktion $\Phi(u, v)$, som är harmonisk i halvplanet $v > 0$ och uppfyller randvillkoren

$$\Phi(u,0) = \begin{cases} \alpha, & u < -r^4, \\ \beta, & -r^4 \leq u \leq r^4, \\ \alpha, & u > r^4. \end{cases}$$

Funktionen

$$\Phi(u,v) = A\arg(w + r^4) + B\arg(w - r^4) + C,$$

är harmonisk i övre halvplanet, $v > 0$, och antar konstanta värden på de tre intervallen $u < -r^4$, $-r^4 \leq u \leq r^4$ och $u > r^4$ på realaxeln. Vi väljer argumenten så att $0 \leq \arg(\cdot) \leq \pi$; vi har $\arg(u + iv) = \operatorname{arccot}\frac{u}{v}$ då $v > 0$. Välj konstanterna A, B och C så att dessa värden blir α, β, respektive α:

$$\begin{aligned} A\pi + B\pi + C = {} & \alpha, \\ B\pi + C = {} & \beta, \\ C = {} & \alpha. \end{aligned}$$

Detta ger $A = \frac{\alpha-\beta}{\pi}$, $B = -\frac{\alpha-\beta}{\pi}$, $C = \alpha$. Med substitutionen $w = z^4$ får vi då en lösning $\varphi(x, y)$ till det givna problemet. Då

$$w = (u+iv) = (x+iy)^4 = (x^2-y^2+2ixy)^2 = (x^2-y^2)^2-4x^2y^2+4ixy(x^2-y^2),$$

blir alltså lösningen

$$\alpha + \frac{\alpha-\beta}{\pi}\Big[\operatorname{arccot}\frac{(x^2-y^2)^2-4x^2y^2+r^4}{4xy(x^2-y^2)} - \operatorname{arccot}\frac{(x^2-y^2)^2-4x^2y^2-r^4}{4xy(x^2-y^2)}\Big].$$

3. Vi kan skriva

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^\infty e^{-\xi}\sin(\xi x)\,d\xi = \int_0^\infty e^{-|\xi|}\sin(\xi x)\,d\xi \\ &= \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty -\pi i \operatorname{sign}(\xi) e^{-|\xi|} e^{i\xi x}\,d\xi. \end{aligned}$$

Detta ger att Fouriertransformen av $f(x)$ är

$$\hat{f}(\xi) = (-\pi i)\operatorname{sign}(\xi)e^{-|\xi|}.$$

Då får vi

$$\mathcal{F}[(f * f)(x)](\xi) = [\hat{f}(\xi)]^2 = -\pi^2 e^{-2|\xi|} = -2\pi\frac{\pi}{2}e^{-2|\xi|},$$

som har invers Fouriertransformen

$$(f * f)(x) = \frac{-2\pi}{x^2+4}.$$

4. Vi sätter $xe^{-x^2} = f(x)$. Fouriertransformen ix-led, ger

$$\hat{u}_t = -\xi^2\hat{u} - c^2\hat{u} = -(\xi^2 + c^2)\hat{u} \Longrightarrow \hat{u}(\xi, t) = C(\xi)e^{-(\xi^2+c^2)t},$$

där

$$\hat{u}(\xi, 0) = C(\xi) = \hat{f}(\xi).$$

Vidare är

$$\mathcal{F}[e^{-x^2}] = \sqrt{\pi}e^{-\xi^2/4} \Longrightarrow \hat{f}(\xi) = i\frac{d}{d\xi}\Big(\sqrt{\pi}e^{-\xi^2/4}\Big) = i\sqrt{\pi}(-\xi/2)e^{-\xi^2/4}.$$

Detta ger att

$$\hat{u}(\xi, t) = -i\sqrt{\pi}(\xi/2)e^{-c^2t}e^{-(t+1/4)\xi^2}.$$

Med $A = t + \frac{1}{4}$ gäller att

$$e^{-A\xi^2} = \mathcal{F}\Big[\frac{1}{\sqrt{4\pi A}}e^{-x^2/4A}\Big],$$

som innebär att

$$(i\xi)e^{-A\xi^2} = \mathcal{F}\Big[\frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{\sqrt{4\pi A}}e^{-x^2/4A}\Big)\Big] = \mathcal{F}\Big[\frac{1}{\sqrt{4\pi A}}\frac{-x}{2A}e^{-x^2/4A}\Big].$$

Med invers Fouriertransformering får vi

$$u(x, t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-c^2t}\frac{1}{\sqrt{4\pi(t + 1/4)}}\frac{x}{2(t + 1/4)}e^{-x^2/4(t+1/4)}$$

vilket, efter förenkling ger

$$u(x, t) = \frac{x}{(4t + 1)^{3/2}}e^{-c^2t}e^{-\frac{x^2}{4t+1}}.$$

5. Eftersom data är φ oberoende så är $u = u(r, \theta)$. Först löser vi θ oberoende problemet för $\tilde{u}$ ur ekvationen:

$$\begin{cases} \nabla^2\tilde{u}(r) = \frac{1}{r}, & 0 < a < r < b \\ \tilde{u}(a) = \tilde{u}(b) = 0. \end{cases}$$

Vi får

$$\begin{aligned} \nabla^2\tilde{u}(r) &= 1/r \Longleftrightarrow \tfrac{1}{r^2}\tfrac{d}{dr}(r^2\tilde{u}') = \tfrac{1}{r},\ \tfrac{d}{dr}(r^2\tilde{u}') = r, r^2\tilde{u}' = \tfrac{r^2}{2} + C, \\ &\Longrightarrow \tilde{u}' = \tfrac{1}{2} + \tfrac{C}{r^2}, \Longrightarrow \tilde{u}(r) = \tfrac{r}{2} - \tfrac{C}{r} + D. \end{aligned}$$

Randvillkoren ger ekvationerna

$$\tilde{u}(a) = 0 \Longrightarrow \frac{a}{2} - \frac{C}{a} + D = 0, \qquad \tilde{u}(b) = 0 \Longrightarrow \frac{b}{2} - \frac{C}{b} + D = 0.$$

v.g.v.

Genom att lösa dessa ekvationer får vi $D = -(a+b)/2$, $C = -ab/2$. Alltså vi har

$$\tilde{u}(r) = \frac{1}{2}\Big[r + \frac{ab}{r} - (a+b)\Big] = \frac{1}{2r}\Big[r^2 - (a+b)r + ab\Big] = \frac{1}{2r}(r-a)(r-b).$$

Sätt $v = u - \tilde{u}$. Då blir ekvationen får v homogen med inhomogena randvillkor:

$$\begin{cases} \nabla^2 v(r,\theta) = 0, & 0 < a < r < b \\ v(a,\theta) = \cos(\theta), & v(b,\theta) = 1. \end{cases}$$

Lösningen för v kan ansättas som

$$v(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(A_n r^n + B_n r^{-n-1}\Big)P_n(\cos\theta),$$

Där P_n är Legendre polynom av ordning n. Vi har att

$$\begin{cases} v(a,\theta) & = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(A_n a^n + B_n a^{-n-1}\Big)P_n(\cos\theta) = \cos(\theta) = P_1(\cos\theta) \\ v(b,\theta) & = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(A_n b^n + B_n b^{-n-1}\Big)P_n(\cos\theta) = 1 = P_0(\cos\theta). \end{cases}$$

Identifiering av koefficienter ger

$$n = 0: \quad \begin{cases} A_0 + B_0/a = 0, & A_0 = -B_0/a, \\ A_0 + B_0/b = 1, & -B_0/a + B_0/b = 1. \quad B_0(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}) = 1 \end{cases}$$

Vi får att

$$B_0 = -\frac{ab}{b-a}, \qquad A_0 = \frac{b}{b-a}$$

P.s.s.

$$n = 1: \quad \begin{cases} A_1 a + B_1/a^2 = 1, & -aB_1/b^3 + B_1/a^2 = 1, \quad B_1(\frac{1}{a^2} - \frac{a}{b^3}) = 1, \\ A_1 b + B_1/b^2 = 0, & A_1 = -B_1/b^3. \end{cases}$$

Vi får att

$$B_1 = \frac{a^2 b^3}{b^3 - a^3}, \qquad A_1 = -\frac{a^2}{b^3 - a^3}.$$

För högre ordnings koefficienter gäller

$$A_n = B_n = 0, \qquad \text{för alla } n \geq 2.$$

Härigenom får vi

$$v(r,\theta) = \Big(\frac{b}{b-a} - \frac{ab}{b-a}\frac{1}{r}\Big) + \Big(\frac{-a^2}{b^3-a^3}r + \frac{a^2 b^3}{b^3-a^3}\frac{1}{r^2}\Big)\cos(\theta).$$

Slutligen $u = \tilde{u} + v$ ger svaret:

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2r}(r-a)(r-b) + \frac{b}{(b-a)r}(r-a) - \frac{a^2}{(b^3-a^3)r^2}(r^3 - b^3)\cos(\theta).$$

6. Data oberoende av $\theta \Longrightarrow u = u(r,z)$ satisfierar

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, & 0 < r < a, \qquad 0 < z < 1, \\ u(r,z), \text{begränsad då} \quad r \to 0, & u(a,z) = 0, \\ u(r,0) = r^2, & u(r,1) = 0. \end{cases}$$

Variabelseparation: $u(r,z) = R(r)Z(z) \neq 0$, ger

$$\frac{1}{r}(rR')'Z + RZ'' = 0 \Longrightarrow -\frac{\frac{1}{r}(rR')'}{R} = \frac{Z''}{Z} = \lambda.$$

Vi får separerade differentialekvationer för R och Z:

$$(I) \quad -\frac{1}{r}(rR')' = \lambda R, \quad R(r) \text{ begränsad då } r \to 0, \quad R(a) = 0,$$

$$(II) \quad Z'' = \lambda Z, \qquad Z(1) = 0.$$

(I) är sigulärt Sturm-Liouville problem med $w(r) = r$. Vi har $\lambda > 0$. Sätt $\lambda = \beta^2$, $\beta > 0$. Ekvationen $\frac{1}{r}(rR')' + \beta^2 R = 0$, är en Bessel differetial ekvation av ordning 0, och har allmän lösning:

$$R(r) = C_1 J_0(\beta r) + C_2 Y_0(\beta r). \quad R(r) \text{ begränsad då } r \to 0 \Longrightarrow C_2 = 0,$$

$$R(a) = 0 \Longrightarrow C_1 J_0(\beta a) = 0, \ C_1 \neq 0 \text{ tag } C_1 = 1, \text{ värför } J_0(\beta a) = 0.$$

Sätt $\beta a = \alpha_{0n}$, där α_{0n}, $n = 1, 2, \ldots$, är de positiva nollställerna till ekvationen $J_0(x) = 0$. Då har vi egenvärdena och egenfunktioner enligt:

$$\beta = \beta_n = \frac{\alpha_{0n}}{a}, \quad \lambda_n = \beta_n^2 = \left(\frac{\alpha_{0n}}{a}\right)^2, \quad R_n(r) = J_0(\beta_n r), \quad n \geq 1.$$

(II) blir då $Z_n'' = \beta^2 Z_n$, som ger

$$Z_n(z) = A_n \sinh \beta_n(1-z) + B_n \cosh \beta_n(1-z)$$

. Med $Z_n(1) = B_n = 0$ får vi

$$Z_n(z) = A_n \sinh \beta_n(1-z).$$

Superposition ger

$$u(r,z) = \sum_{n=1}^{\infty} R_n(r) Z_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\beta_n r) \sinh \beta_n(1-z),$$

med

$$u(r,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh \beta_n J_0(\beta_n r) = r^2.$$

v.g.v.

Eftersom $\{J_0(\beta_n r)\}_{n=1}^{\infty}$ är ett fullständigt ortogonalsystem på $(0,a)$ med $w(r)=r$. Fourierkoefficienter till r^2 är:

$$A_n \sinh\beta_n = \frac{1}{\rho_n}\int_0^a r^2 J_0(\beta_n r) r\,dr := \frac{1}{\rho_n} I_a.$$

Nedan räknar vi I_a:

$$\begin{aligned}
I_a &= \textstyle\int_0^a r^3 J_0(\beta_n r)\,dr = \int_0^a r^3 R_n(r)\,dr = -\frac{1}{\lambda_n}\int_0^a r^2 \frac{d}{dr}(rR_n'(r))\,dr \\
&= -\tfrac{1}{\lambda_n}\Big[r^3 R_n'(r)\Big|_0^a - \textstyle\int_0^a 2r\cdot rR_n'(r)\,dr\Big] \\
&= -\tfrac{1}{\lambda_n}\Big[a^3 R_n'(a) - \Big(2r^2 R_n(r)\Big)\Big|_0^a + 4\textstyle\int_0^a rR_n(r)\,dr\Big] \\
&= \{R_n(a)=0\} = -\tfrac{1}{\lambda_n}\Big[a^3 R_n'(a) + 4\textstyle\int_0^a J_0(\beta_n r)\,r dr\Big] = \{\beta_n r = x\} \\
&= -\tfrac{1}{\lambda_n}\Big[a^3 R_n'(a) + \tfrac{4}{\beta_n^2}\textstyle\int_0^{\beta_n a} J_0(x)\,x dx\Big] = -\tfrac{1}{\lambda_n}\Big[a^3 R_n'(a) + \tfrac{4}{\beta_n^2}\Big(xJ_1(x)\Big)\Big|_0^{\beta_n a}\Big] \\
&= -\tfrac{1}{\beta_n^2}\Big[a^3 R_n'(a) + \tfrac{4a}{\beta_n}J_1(\beta_n a)\Big] = -\tfrac{1}{\beta_n^2}\Big[a^3\beta_n J_0'(\beta_n a) + \tfrac{4a}{\beta_n}J_1(\beta_n a)\Big] \\
&= \{J_0'(\beta_n a) = -J_1(\beta_n a)\} = -\tfrac{1}{\beta_n^2}\Big[-a^3\beta_n + \tfrac{4a}{\beta_n}\Big]J_1(\beta_n a) \\
&= \Big(\tfrac{a^2\beta_n - 4}{\beta_n^3}\Big)aJ_1(\beta_n a).
\end{aligned}$$

Vidare, enligt Theorem 5.3, är $\rho_n = \frac{a^2}{2}J_1^2(\beta_n a)$. Eller se nedan:

$$\begin{aligned}
\rho_n &= \textstyle\int_0^a J_0^2(\beta_n r)\,r dr = [x=\beta_n r] = \frac{1}{\beta_n^2}\int_0^{\beta_n a} J_0^2(x)\,x dx \\
&= \tfrac{1}{\beta_n^2}\Big[\tfrac{x^2}{2}\Big(J_0^2(x) + J_1^2(x)\Big)\Big]_0^{\beta_n a} = \tfrac{1}{\beta_n^2}\tfrac{\beta_n^2 a^2}{2}J_1^2(\beta_n a) = \tfrac{a^2}{2}J_1^2(\beta_n a).
\end{aligned}$$

Värför

$$A_n \sinh(\beta_n) = \frac{1}{\frac{a^2}{2}J_1^2(\beta_n a)}\cdot\Big(\frac{a^2\beta_n - 4}{\beta_n^3}\Big)aJ_1(\beta_n a) = \frac{2(a^2\beta_n - 4)}{a\beta_n^3 J_1(\beta_n a)}.$$

Och svaret är

$$u(x,z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(a^2\beta_n - 4)}{a\beta_n^3}\cdot\frac{J_0(\beta_n r)}{J_1(\beta_n a)}\cdot\frac{\sinh\beta_n(1-z)}{\sinh\beta_n}, \quad \beta_n = \frac{\alpha_{0n}}{a}.$$

MA