Hjälpmedel: Beta, Standard math. tabels, typgodkänd räknedosa
MATEMATIK Telefon: Erik Broman, 0740–459022
Chalmers tekniska högskola 2003–03–08 kl. 8.45-13.45

TMA132 Fourieranalys F2/Kf2, 5 poäng

OBS! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

1. Bestäm det polynom $P(x)$ av högst andra graden som minimerar

$$\int_0^\infty [e^{-x} - P(x)]^2 x\, e^{-x}\, dx.$$

2. Signalen $x(t),\ -\infty < t < \infty$ har Fouriertransformen $\hat{x}(\omega)$ där

$$|\hat{x}(\omega)| = \begin{cases} 1, & \text{för } |\omega| < 1, \\ 2, & \text{för } 2 < |\omega| < 3, \\ 0, & \text{f.ö.} \end{cases}$$

Låt $\alpha > 0$ och sätt $h_\alpha(t) = \frac{\sin \alpha t}{\pi t},\ -\infty < t < \infty$. Bestäm funktionen

$$f(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \Big| (h_\alpha * x)(t) \Big|^2 dt,$$

och rita dess graf.

3. Låt $\chi_a(x) = \theta(x+a) - \theta(x-a)$. Bestäm en lösning till ekvationen

$$\begin{cases} u_{xx} + c u_x = u_t, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \chi_a(x), & -\infty < x < \infty, \end{cases}$$

där c är en reell parameter och $a > 0$.

4. Bestäm den elektrostatiska potentialen i området utanför två tangerande cylindrar med cirkulära tvärsnitt $C_1 : |z| \le 1$, och $C_2 : |z - 3/2| \le 1/2$ och med motsvarande randvärdena P_1 på $|z| = 1$, resp. P_2 på $|z - 3/2| = 1/2$.

5. Antag att $c > 0$. Bestäm en lösning (spänningen $u(x,t)$ längs en elkabel med konstant polspänning $E \ne 0$) till ekvationen

$$\begin{cases} u_{xx} = \frac{1}{c^2} u_{tt}, & t > 0, & 0 < x < 1, \\ u(0,t) = E, & u_x(1,t) + 2u(1,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = 0, & u_t(x,0) = 0, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

6. Bestäm den stationära temperaturen i cylindern $x^2 + y^2 \le a^2,\ 0 \le z \le b$ då den buktiga ytan $x^2 + y^2 = a^2$ och ”toppen”: $z = b$ hålls vid temperaturen 0 medan ”botten”: $z = 0$ är på en ”platta” med tempuraturen $f(r,\theta)$ där $f(a,\theta) = 0$, för $-\pi \le \theta \le \pi$.

7. f är 2π-periodisk och styckvis $\mathcal{C}^1$ på $\mathbb{R}$ med $\mathcal{F}$-koefficienter C_n. Visa att

$$\sum_{-N}^{N} C_n e^{in\theta} \longrightarrow \frac{1}{2}\Big[f(\theta_-) + f(\theta_+)\Big], \qquad \text{då } N \longrightarrow \infty.$$

8. Formulera och bevisa Fouriers inversionssats (obs! valfritt version).

MA