Praktiska detaljer i kursen

- Hemsida (uppdateras efter hand): `http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tma136/0203/`
- E-postlista: anmälan via hemsida.
- Schema: se hemsidan
- Inlämningsuppgifter: Modellering och lösning av uppgifter, med/utan datorprogram, skriftliga redovisningar (+ en muntlig)
- Datorsalar: bokas efter önskemål idag
- Fallstudie: Modellering och lösning av uppgift, med datorprogram, skriftlig och muntlig redovisning
- Muntlig presentation av en vetenskaplig artikel (väljs från lista)
- Muntlig tentamen för överbetyg
- Inlämningsuppgifter och presentationer görs lämpligen parvis

Optimering

- Att göra något så bra som möjligt
- Deterministisk: förutsättningar kända

Optimering under osäkerhet

- Bestäm handlingsplan innan all information blivit känd
- Ta hänsyn till att information blir känd efterhand
- Ta även hänsyn till de beslut man senare kommer att fatta med hjälp av denna nya information

Skillnader

- Osäkra data representeras av sannolikhetsfördelningar
- Optimeringsproblemen ökar *mycket* i storlek

Översikt över kursinnehållet

- Några små exempel på optimering under osäkerhet
- Repetition: linjärprogrammering, dualitet, sannolikhetslära mm.
- Modellering: komponenter, språk (AMPL) mm.
- Optimalitet, dekomposition—metodprinciper
- Tvåstegsmodeller med "recourse": algoritmer och godhetsmått
- Nyttofunktioner
- Finansiell planering, riskmått, probabilistiska bivillkor
- Fallstudier—aktuella projekt
- Presentationer av vetenskapliga artiklar + uppgifter
- Stokastiska heltalsmodeller

Tomt-exploatering

- Två fastigheter

1 Utveckla infrastruktur (vatten, avlopp, gator, elnät)

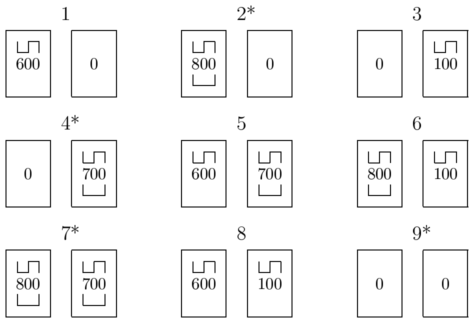
2a Bygg fabrik nu (framtida intäkter p ej kända)

2b Bebygg senare, då intäkterna p är kända (kostnader +10%)

Kostnader:	Infrastruktur nu	Bygg nu	Bygg senare
Fastighet 1	600	200	220
Fastighet 2	100	600	660

- När p är känd finns ej tid att bygga infrastruktur

Nio olika möjligheter nu (infra, bygg)



Om vi vet intäkterna p i förväg

- Lönar sig aldrig att bygga *bara* infrastruktur ⇒ enbart alternativ # 2, 4, 7 & 9 är intressanta

Intervall	Optimalt beslut	
$p < 700$	9	gör ingenting
$700 \le p < 800$	4	(infra + bygg) på fast. 2
$p \ge 800$	7	(infra + bygg) på båda fast.

- Antag att $P(p = 210) = P(p = 1250) = \frac{1}{2}$
- Väntevärde $E(p) = 730 \Rightarrow$ Optimalt beslut: 4, Vinst: $730 - 700 = 30$

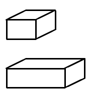
p ej känd i förväg

Beslut #	Kostnad	Intäkt $p = 210$	Intäkt $p = 1250$	Förväntad vinst
1	-600	0	$\frac{1}{2}(1250 - 220)$	-85
2	-800	$\frac{1}{2}$ 210	$\frac{1}{2}$ 1250	-70
3	-100	0	$\frac{1}{2}(1250 - 660)$	bäst! 195
4	-700	$\frac{1}{2}$ 210	$\frac{1}{2}$ 1250	30
5	-1300	$\frac{1}{2}$ 210	$\frac{1}{2}(2500 - 220)$	-55
6	-900	$\frac{1}{2}$ 210	$\frac{1}{2}(2500 - 660)$	125
7	-1500	$\frac{1}{2}$ 420	$\frac{1}{2}$ 2500	-40
8	-700	0	$\frac{1}{2}(2500 - 880)$	110
9	0	0	0	0

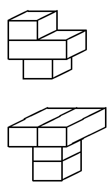
Infra. vid fast. 2, invänta utfallet för p, besluta om bygge

LEGO-exempel

Små bitar
Inköpspris: 100:-



Stora bitar
Inköpspris: 200:-



Stol
Efterfrågan: $50 + \xi_2$
Försäljn.pris: $(5 + \eta_2)\cdot 100$:-

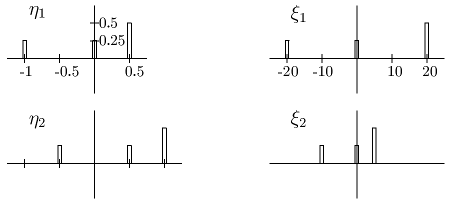
Bord
Efterfrågan: $100 + \xi_1$
Försäljn.pris: $(8 + \eta_1)\cdot 100$:-

De stokastiska variablerna η_1, η_2, ξ_1 och ξ_2 antas ha diskreta fördelningsfunktioner

9

Fördelningsfunktioner

Med sannolikheterna $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$ respektive $\frac{1}{2}$ antas värdena $\eta_1 \in \{-1, 0, 0.5\}$, $\eta_2 \in \{-0.5, 0.5, 1\}$, $\xi_1 \in \{-20, 0, 20\}$ och $\xi_2 \in \{-10, 0, 5\}$.



De lägre/högre nivåerna på efterfrågan hör ihop med de lägre/högre prisnivåerna (de 4 stokastiska variablerna är beroende).

10

Definition av variabler

- Efterfrågan och försäljningspris på möbler är ej kända då inköp av bitar görs. Inköpsbudgeten är 80.000 : –
- Variabler:

$$\begin{array}{lcl} x_1 & = & \text{antal stora bitar som köps in} \\ x_2 & = & \text{antal små bitar som köps in} \\ y_1 & = & \text{antal bord som tillverkas} \\ y_2 & = & \text{antal stolar som tillverkas} \\ v_1 & = & \text{antal bord som säljs} \\ v_2 & = & \text{antal stolar som säljs} \end{array}$$

- Värdena på inköpsvariablerna x_1 och x_2 måste bestämmas innan efterfrågan och försäljningspris är kända.
  Tillverkning och försäljning, y_1, y_2, v_1 och v_2, bestäms senare.

11

Matematisk modell

Minimera inköpskostnader minus försäljningsintäkter

$$\begin{array}{llllllll} \min & z = 100 \cdot [2x_1 & +x_2 & -(8+\eta_1)v_1 & -(5+\eta_2)v_2] & \\ \text{då} & 2x_1 & +x_2 & & & \leq 800 \\ & x_1 & & -2y_1 & -y_2 & \geq 0 \\ & & x_2 & -2y_1 & -2y_2 & \geq 0 \\ & & & y_1 - v_1 & & \geq 0 \\ & & & & y_2 - v_2 & \geq 0 \\ & & & v_1 & & \leq 100 + \xi_1 \\ & & & & v_2 & \leq 50 + \xi_2 \\ & x_1, & x_2, & y_1, v_1 & y_2, v_2 & \geq 0 \text{ (heltal)} \end{array}$$

12

Väntevärdeslösning

Antag att de stokastiska variablerna antar sina respektive förväntade värden, d.v.s.,

$$E(\eta_1) = \tfrac{1}{4} \cdot (-1) + \tfrac{1}{4} \cdot 0 + \tfrac{1}{2} \cdot 0.5 = 0$$
$$E(\eta_2) = \tfrac{1}{4} \cdot (-0.5) + \tfrac{1}{4} \cdot 0.5 + \tfrac{1}{2} \cdot 1 = 0.5$$
$$E(\xi_1) = \tfrac{1}{4} \cdot (-20) + \tfrac{1}{4} \cdot 0 + \tfrac{1}{2} \cdot 20 = 5$$
$$E(\xi_2) = \tfrac{1}{4} \cdot (-10) + \tfrac{1}{4} \cdot 0 + \tfrac{1}{2} \cdot 5 = 0$$

Ersätt de stokastiska parametrarna i den matematiska modellen med sina väntevärden.

13

En deterministisk optimeringsmodell

$$\begin{array}{lllllll} \min & z = 100 \cdot [2x_1 & +x_2 & -8v_1 & -5.5v_2] & \\ \text{då} & 2x_1 & +x_2 & & & \leq 800 \\ & x_1 & & -2y_1 & -y_2 & \geq 0 \\ & & x_2 & -2y_1 & -2y_2 & \geq 0 \\ & & & y_1 - v_1 & & \geq 0 \\ & & & & y_2 - v_2 & \geq 0 \\ & & & v_1 & & \leq 105 \\ & & & & v_2 & \leq 50 \\ & x_1, & x_2, & y_1, v_1, & y_2, v_2 & \geq 0 \text{ (heltal)} \end{array}$$

Lösning: $x_1 = 250$, $x_2 = 300$, $y_1 = 100$, $y_2 = 50$, $v_1 = 100$, $v_2 = 50$, $z = -27,500$

Deterministisk lösning: Köp in 250 stora och 300 små bitar.
Vinst: $27,500$:-. Tillverka och sälj 100 bord och 50 stolar.
Ej tillåtet vid låg efterfrågan.

14

En realistisk (pessimistisk) deterministisk optimeringsmodell

$$\begin{array}{lllllll} \min & z = 100 \cdot [2x_1 & +x_2 & -8v_1 & -5.5v_2] & \\ \text{då} & 2x_1 & +x_2 & & & \leq 800 \\ & x_1 & & -2y_1 & -y_2 & \geq 0 \\ & & x_2 & -2y_1 & -2y_2 & \geq 0 \\ & & & y_1 - v_1 & & \geq 0 \\ & & & & y_2 - v_2 & \geq 0 \\ & & & v_1 & & \leq 80 \\ & & & & v_2 & \leq 40 \\ & x_1, & x_2, & y_1, v_1, & y_2, v_2 & \geq 0 \text{ (heltal)} \end{array}$$

Lösning: $x_1 = 200$, $x_2 = 240$, $y_1 = 80$, $y_2 = 40$, $v_1 = 80$, $v_2 = 40$, $z = -22,000$

Deterministisk lösning: Köp in 200 stora och 240 små bitar.
Vinst: $22,000$:-. Tillverka och sälj 80 bord och 40 stolar.

15

En stokastisk optimeringsmodell

- **Steg 1:** Vid beslut om inköp av råmaterial tas hänsyn till de olika möjliga utfallen av efterfrågan och försäljningspriser och de sannolikheter med vilka dessa inträffar, samt de tillverkningsbeslut som kommer att fattas längre fram—för de olika utfallen.
- 3 olika scenarier: låg/medel/hög pris- och efterfrågenivå.
- **Steg 2:** När beslut om tillverkning tas vet vi dels pris- och efterfrågenivå, dels hur mycket råmaterial som köpts in.

\- Gör så bra som möjligt med hänsyn till vad som hänt och de beslut som redan fattats.

16

Steg 1–beslut

Bestäm hur många bitar som skall köpas in (x).
Tag hänsyn till framtida möjliga utfall (efterfrågan ξ och prisnivåer η), tillverkningsbeslut $(y(x, \xi, \eta))$ och försäljning $(v(x, \xi, \eta))$.

$$\begin{array}{lll} \min & z = 100 \cdot [2x_1 + x_2 \quad + E_{\xi,\eta} Q(x, \xi, \eta)] & \text{(konvex i } x) \\ \text{då} & 2x_1 + x_2 \quad \leq 800 & \\ & x_1, x_2 \quad \geq 0 \text{ (heltal)} & \end{array}$$

$$Q(x, \xi, \eta) = \left(\begin{array}{lllll} \min & -(8+\eta_1)v_1 & -(5+\eta_2)v_2 & \\ \text{då} & 2y_1 & +y_2 & \leq x_1 \\ & 2y_1 & +2y_2 & \leq x_2 \\ & v_1 & & \leq y_1 \\ & & v_2 & \leq y_2 \\ & v_1 & & \leq 100 + \xi_1 \\ & & v_2 & \leq 50 + \xi_2 \\ & y_1, v_1 & y_2, v_2 & \geq 0 \text{ (heltal)} \end{array} \right)$$

Förväntade framtida intäkter

$$E_{\xi,\eta}Q(x,\xi,\eta) = \tfrac{1}{4}Q(x,\xi^1,\eta^1) + \tfrac{1}{4}Q(x,\xi^2,\eta^2) + \tfrac{1}{2}Q(x,\xi^3,\eta^3)$$

$$= -\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} \max & 7v_1^1 + 4.5v_2^1 \\ \text{då} & 2y_1^1 + y_2^1 \le x_1 \\ & 2y_1^1 + 2y_2^1 \le x_2 \\ & v_1^1 \le \min\{y_1^1, 80\} \\ & v_2^1 \le \min\{y_2^1, 40\} \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \max & 8v_1^2 + 5.5v_2^2 \\ \text{då} & 2y_1^2 + y_2^2 \le x_1 \\ & 2y_1^2 + 2y_2^2 \le x_2 \\ & v_1^2 \le \min\{y_1^2, 100\} \\ & v_2^2 \le \min\{y_2^2, 50\} \end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \max & 8.5v_1^3 + 6v_2^3 \\ \text{då} & 2y_1^3 + y_2^3 \le x_1 \\ & 2y_1^3 + 2y_2^3 \le x_2 \\ & v_1^3 \le \min\{y_1^3, 120\} \\ & v_2^3 \le \min\{y_2^3, 55\} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \text{Samt alla} \\ v_j^s \text{ och } y_j^s \ge 0 \end{pmatrix}$$

Deterministisk ekvivalent modell

$$\begin{array}{llllllllll}
\min\ z = 2x_1 & +x_2 & -\frac{7}{4}v_1^1 - \frac{4.5}{4}v_2^1 & & -\frac{8}{4}v_1^2 - \frac{5.5}{4}v_2^2 & & -\frac{8.5}{2}v_1^3 & -\frac{6}{2}v_2^3 & & \\
\text{då}\quad 2x_1 & +x_2 & & & & & & & \le 800 \\
-x_1 & & 2y_1^1 & +y_2^1 & & & & & \le 0 \\
 & -x_2 & 2y_1^1 & +2y_2^1 & & & & & \le 0 \\
 & & v_1^1 & & & & & & \le \min\{y_1^1, 80\} \\
 & & & v_2^1 & & & & & \le \min\{y_2^1, 40\} \\
-x_1 & & & & 2y_1^2 & +y_2^2 & & & \le 0 \\
 & -x_2 & & & 2y_1^2 & +2y_2^2 & & & \le 0 \\
 & & & & v_1^2 & & & & \le \min\{y_1^2, 100\} \\
 & & & & & v_2^2 & & & \le \min\{y_2^2, 50\} \\
-x_1 & & & & & & 2y_1^3 & +y_2^3 & \le 0 \\
 & -x_2 & & & & & 2y_1^3 & +2y_2^3 & \le 0 \\
 & & & & & & v_1^3 & & \le \min\{y_1^3, 120\} \\
 & & & & & & & v_2^3 & \le \min\{y_2^3, 55\} \\
x_1, & x_2, & y_1^1, y_2^1, & v_1^1, v_2^1, & y_1^2, y_2^2, & v_1^2, v_2^2, & y_1^3, y_2^3 & v_1^3, v_2^3 & \ge 0 \text{ (heltal)}
\end{array}$$

Lösning: $z = 22,875$, $x = (250, 300)$, $(y^1; v^1) = (87, 51; 80, 40)$, $y^2 = v^2 = y^3 = v^3 = (100, 50)$

Lösning till den optimeringsmodell som tar hänsyn till osäkerheten

- Då det inte kostar något att tillverka (inga y-variabler i målfunktionen) så kan vi under scenario 1 tillverka allt mellan 80 och 100 bord, och allt mellan 40 och 50 stolar. (Lösaren råkade välja $y^1 = (87, 51)$.)
- Om scenario 1 inträffar (låg) blir vinsten:
  $-100 \cdot (2 \cdot 250 + 300 - 7 \cdot 80 - 4.5 \cdot 40) = -6,000$
- Om scenario 2 inträffar (mellan) blir vinsten:
  $-100 \cdot (2 \cdot 250 + 300 - 8 \cdot 100 - 5.5 \cdot 50) = 27,500$
- Om scenario 3 inträffar (hög) blir vinsten:
  $-100 \cdot (2 \cdot 250 + 300 - 8.5 \cdot 100 - 6 \cdot 50) = 35,000$
- Förväntad vinst: $\frac{-6,000}{4} + \frac{27,500}{4} + \frac{35,000}{2} = 22,875$