1

Probabilistiska bivillkor

$$\begin{aligned} \min_{x \in X} \quad & E_\xi\{g_0(x,\xi)\} \\ \text{då} \quad & P(g_i(x,\xi) \le 0,\ i = 1,\dots,m) \ge \alpha \end{aligned}$$

där $\alpha \in (0,1)$

- Probabilistiska bivillkor (“ chance constraints”)
- Kan göra problemet ickekonvext.

2

Probabilistiska bivillkor, likhet

Vad händer om vi har likhetsbivillkor? För kontinuerliga fördelningar har vi (troligen)

$$P(g_i(x,\xi) = 0) = 0$$

Detta är orealistiskt. Om vi har likhet måste vi modellera enligt

$$P(l \le g_i(x,\xi) \le u) \ge \alpha$$

3

LP

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathsf{E}[c(\omega)^{\mathrm{T}} x] \\ \text{då} \quad & P(T(\omega)x \ge h(\omega)) \ge \alpha \end{aligned}$$

Precis som tidigare är detta möjligen icke-konvext. Vad händer om vi delar upp det probabilitsiska bivillkoret?

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathsf{E}[c(\omega)^{\mathrm{T}} x] \\ \text{då} \quad & P(T_i(\omega)x \ge h_i(\omega)) \ge \alpha_i, \quad i = 1 \dots n \end{aligned}$$

Vi får nu ett antal bivilkor vilka skall gälla var för sig, vi kan behandla dem separat

4

Osäkerhet enbart i hl

Vi antar nu att osäkerheten ligger endast i HL

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathsf{E}[c(\omega)^{\mathrm{T}} x] \\ \text{då} \quad & P(T_i x \ge h_i(\omega)) \ge \alpha_i \end{aligned}$$

Då har vi att

$$P(T_i x \ge h_i(\omega)) \ge \alpha_i$$

är ekvivalent med

$$F_{h_i(\omega)}(T_i x) \ge \alpha_i$$

vilket är ekvivalent med

$$(T_i x) \ge F^{-1}_{h_i(\omega)}(\alpha)$$

Varje probabilistiskt bivillkor ger ett normalt linjärt bivilkor.

5

LP med normalfördelning

Antag igen att vi har problemet

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathsf{E}[c(\omega)^{\mathrm{T}} x] \\ \text{då} \quad & P(t(\omega)x \ge h(\omega)) \ge \alpha \end{aligned}$$

(för enkelhets skull antar vi att vi har ett enda linjärt bivilkor)

I vissa speciella fall kan vi säga något även om t är stokastisk. Antag att $t(\omega)$ och $h(\omega)$ är en multivariat normalfördelning.

För ett visst x är $t^{\mathrm{T}}(\omega)x - h(\omega)$ då en normalfördelad stokastisk variablel. För att underlätta sätter vi $\hat{x} = (x,-1), \hat{t} = (t,h)$ och vi får bivilkoret som

$$P(\hat{t}^{\mathrm{T}}\hat{x} \ge 0) \ge \alpha$$

6

Låt nu μ vara medelvärdet, och σ^2 vara variansen hos $\hat{t}^{\mathrm{T}}\hat{x}$

Då har vi att

$$\frac{\hat{t}^{\mathrm{T}}\hat{x} - \mu}{\sigma}$$

är en $N(0,1)$ variabel.

Bivilkoret ovan kan skrivas

$$P\left(\frac{\hat{t}^{\mathrm{T}}\hat{x} - \mu}{\sigma} \ge \frac{-\mu}{\sigma}\right) \ge \alpha$$

7

Låter vi Φ vara den kumulativa fördelningsfunktionen för en $N(0,1)$ variabel får vi då att bivilkoret är ekvivalent med

$$(1 - \Phi(\frac{-\mu}{\sigma})) \ge \alpha$$
$$\Phi(\frac{-\mu}{\sigma}) \le 1 - \alpha$$

vilket är ekvivalent med

$$\frac{-\mu}{\sigma} \le \Phi^{-1}(1-\alpha)$$
$$0 \le \Phi^{-1}(1-\alpha)\sigma + \mu$$

8

Efter omskrivning har vi

$$\frac{-\mu}{\sigma} \le \Phi^{-1}(1-\alpha)$$
$$-\Phi^{-1}(1-\alpha)\sigma - \mu \le 0$$

För $\alpha \ge 0.5$ har vi $-\Phi^{-1}(1-\alpha) \ge 0$ Därmed har vi att bivillkoret är konvext om vi kan visa att σ och $-\mu$ är konvexa funktioner av $\hat{x}$.

Då vi har

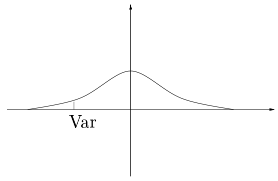
$$\mu = \mathsf{E}[\hat{t}^{\mathrm{T}}\hat{x}] = \mathsf{E}[\hat{t}^{\mathrm{T}}]\hat{x}$$

har vi att $-\mu$ är en linjär och därmed konvex funktion av $\hat{x}$.

På samma sätt kan vi visa att σ är en konvex funktion av $\hat{x}$. Därmed kan vi ta fram ett konvext bivilkor som är oberoende av utfallet ω

Value at risk

Value at risk är den summa pengar vi kan förlora med en viss sannolikhet.



Om VaR på 95%-nivån för en investering är -100:- kommer vi i 95 % av fallen att förlora maximalt 100:-

Nackdelar mev VaR

- Var är inte subbaditivt (VaR för två papper kan vara större än summan av pappren var för sig
- Ej konvext

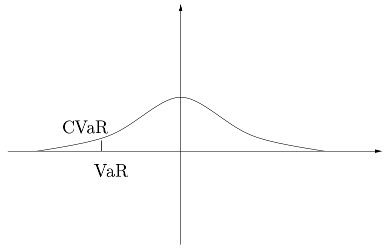
OBS: Varning för teckenförvirring. Vissa författare talar om VaR som den förlust vi gör när det går dåligt, andra som den vinst vi gör (troligen negativ) när det går dåligt.

Istället för VaR inför vi CVaR.

Conditional Value at risk

Conditional value at risk är väntevärdet av den summa vi förlorar om vi får ett av de x% värsta utfallen. Ifall ξ är vårt utfall kan vi uttrycka 95% CVar som

$$\begin{aligned} CVaR &= \mathsf{E}[\xi | F_\xi(\xi) \leq 0.05] \\ &= \mathsf{E}[\xi | \xi \leq F_\xi^{-1}(0.05)] \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{F_\xi^{-1}(0.05)} t dF_\xi(t)}{0.05} \end{aligned}$$



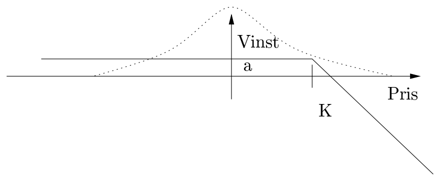
Optionsexempel

En (europeisk) köpoption berättigar köparen av en option att köpa en aktie till ett visst förutbestämt en viss dag i framtiden. För denna rätt får köparen betala ett pris.

Låt oss anta att vi kan sälja köpoptioner för aktier till priset a och att dessa har lösenpris K kr. Antag vidare att vi på något sätt får en sannolikhetsfördelning för aktiens pris på lösendagen och att sannolikheten för att priset skall bli högre än K är 5%. Om aktiens pris på lösendagen är S kronor kommer avkastningen på vår affär att bli

$$a - \max(0, S - K)$$

Optionsexempel



Optionsexempel

- VaR blir, för n sålda optioner $n * a$
- CVaR blir, för n sålda optioner $n * (a - \mathsf{E}[\max(0, S - K) | S \geq F_s^{-1}(0.95)])$

D.V.S vårt VaR värde blir bara bättre ju fler optioner vi säljer. CVaR kommer däremt att återspegla den ökande risken.

Optimiering av CVaR

I princip måste vi hitta VaR för att kunna beräkna CVaR. Detta går att komma runt. Vi definierar förlustfunktionen

$$f(x, \omega)$$

som den förlust vi gör vid ett visst utfall ω om vi fattar beslutet x. Vidare definierar vi VaR funktionen som

$$a(x, \beta)$$

VaR funktionen är VaR för konfidensnivå β givet beslut x.

optimiering av CVaR

Vi kan nu få CVaR som

$$\frac{1}{(1-\beta)}\int_{f(x,\omega)\geq a(x,\beta)} f(x,\omega)dP(\omega)$$

Tricket är nu att definiera

$$F_\beta(x,\alpha) = \alpha + \frac{1}{(1-\beta)}\int_{f(x,\omega)\geq\alpha}(f(x,\omega)-\alpha)dP(\omega)$$
$$= \alpha + \frac{1}{(1-\beta)}\int_{\omega\in\Omega}(\max(f(x,\omega)-\alpha,0)dP(\omega)$$

Minimerar vi nu $F_\beta(x,\alpha)$ med avseende på α kommer vi att få VaR= α^*, CVaR= $F_\beta(x,\alpha^*)$.

Varför funkar detta?

Vi tittar på

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}F_\beta(x,\alpha) =$$
$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\big(\alpha + \frac{1}{(1-\beta)}\int_{\omega\in\Omega}(\max(f(x,\omega)-\alpha,0)dP(\omega)\big)$$
$$= 1 + \frac{1}{(1-\beta)}\int_{\omega\in\Omega}\frac{\partial}{\partial\alpha}(\max(f(x,\omega)-\alpha,0)dP(\omega)$$

Vi har nu att

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\max(f(x,\omega)-\alpha,0) = 0 \quad \text{om} \quad f(x,\omega) < \alpha$$
$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\max(f(x,\omega)-\alpha,0) = -1 \quad \text{om} \quad f(x,\omega) > \alpha$$

Därmed får vi

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_{\omega\in\Omega}(\max(f(x,\omega)-\alpha,0)dP(\omega) =$$
$$\int_{f(x,\omega)\geq\alpha}(-1)dP(\omega) = -P(f(x,\omega)\geq\alpha)$$

Vi ser då att $\frac{\partial}{\partial\alpha}F_\beta(x,\alpha) = 0$ inträffar precis då

$$1 - \frac{1}{1-\beta}P(f(x,\omega)\geq\alpha) = 0$$

d.v.s då

$$1-\beta = P(f(x,\omega)\geq\alpha)$$

Optimering av CVaR

Om $f(x,\omega)$ är konvex i x kommer $F_\beta(x,\alpha)$ vara konvex i båda variablerna. Därmed kommer problemet

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x,\alpha} & F_\beta(x,\alpha) \\ \text{då} & x\in X \end{array}$$

Vara ett konvext minimeringsproblem om X är ett konvext område. Vi beräknar ej CVarR för varje x men hittar ändå den korrekta lösningen!

Exempel, scenarier

Vi försöker nu göra detta med ett begränsat antal utfall (n). Vi antar att alla utfall har en lika stor sannolikhet Vi gör något som påminner om markiwitz, vi minimerar CVaR givet en viss specificerad förväntad vinst vi vill ha. låt y_i vara en vektor av avkastning på m olika investeringar. Låt x vara den andel av vårt kapital som vi allokerar till en viss investering.

Vi får då problemet

$$\begin{array}{ll} \min & F_\beta(x,\alpha) \\ \text{då} & \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}x^{\mathrm{T}}y_i = s \\ & \sum_{i=1}^{n}x_i = 1 \\ & x_i\geq 0 \quad \forall i=1\ldots m \end{array}$$

där vi nu har definitionen

$$F_\beta(x,\alpha) = \alpha + \frac{1}{(1-\beta)}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\max(x^{\mathrm{T}}y_i-\alpha,0)$$

Då vi minimerar en maxfunktion kan vi skriva detta

$$\begin{array}{ll} \min & \alpha + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n(1-\beta)}z_i \\ \text{då} & \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}x^{\mathrm{T}}y_i = s \\ & z_i\geq x^{\mathrm{T}}y_i-\alpha, \quad \forall i\in 1\ldots n \\ & \sum_{i=1}^{n}x_i = 1 \\ & x_i\geq 0 \quad \forall i=1\ldots m \\ & z_i\geq 0 \quad \forall i=1\ldots n \end{array}$$

Robust solutions of ...

Vi tittar på problemet

$$\begin{array}{ll} \min & c^{\mathrm{T}}x \\ \text{då} & Ex = e \\ & Ax\leq b \\ & l\leq x\leq u \end{array}$$

Ide, data i LP är uppskattningar av underliggande processer. Dessa uppskattningar är i allmänhet behäftade med fel.

En koefficent antas vara en approximativ uppskattning om

- Den ingår i ett olikhetsbivillkor
- Den ej kan uttryckas som ett rationellt tal a/b med $-100\leq a\leq 100, 1\leq b\leq 100, a, b$ heltal.

Typiskt fel

Vi antar att vissa av dessa koefficienter är behäftade med ett fel , d.v.s det sanna värdet är $(\tilde{a}_{ij}) = (1 + \epsilon\chi_{ij})a_{ij}$, där ϵ anger storleksordningen på felet, och χ är likafördelad på $[-1, 1]$ Vidare antas att dessa fel är oberoende Vi definierar

$$\xi = \sum_j \tilde{a}_{ij}x_j - b_i.$$

vilket blir det verkliga värdet på bivillkoret minus högerledet. Detta är en stokastisk variabel, och vi kommer att bryta mot bivillkoret om $\xi > 0$.

Denna stokastiska variabel får medelvärde och standardavvikelse

$$\bar{\xi} = \sum_j a_{ij}x_j - b_i, \sigma = \epsilon\sqrt{\sum_{j\in J_i} a_{ij}^2 x_j^2}$$

Det "typiska" brottet mot dessa bivilkor blir då $\max(\bar{\xi} + \sigma, 0)$, då vi tar hänsyn till att vi kan ha haft slack i bivillkoret.

Vi låter J_i beteckna mängden av koeficienter i bivillkor i som är behäftade med fel. Om a_ij är beäftad med fel har vi $j \in J_i$

Vi vill hitta lösning som klarar sämsta tänkbara utfall med viss tolerans. Detta gör vi genom att se till att lösningen uppfyller

$$\sum_{j\in J_i^c} a_{ij}x_j + \sum_{j\in J_i} \tilde{a}_{ij}x_j \le b_i + \delta \max(b_i, 1)$$

för alla tänkbara utfall på $\tilde{a}_{ij}$. δ är en given tolerans, d.v.s vi gör bivillkoret lite lättare att uppfylla. $\max(1, b_i)$ kommer av att vi normerar med b_i.

Att hitta en sådan lösning blir ekvivalent med att lösa problemet

$$\begin{array}{rl} \min & c^{\mathrm{T}}x \\ \text{då} & Ex = e \\ & \sum_j a_{ij}x_j + \epsilon \sum_{j\in J_i} |a_{ij}||x_j| \le b_i + \delta \max(b_i, 1) \forall i \\ & l \le x \le u \end{array}$$

Noera att vi bytt J_i^c mot j i första summan.

vilket i sin tur är ekvivalent med att lösa LP-problemet

$$\begin{array}{rl} \min & c^{\mathrm{T}}x \\ \text{då} & Ex = e \\ & \sum_{j\in J_i^c} a_{ij}x_j + \epsilon \sum_{j\in J_i} |a_{ij}|y_j \le b_i + \delta \max(b_i, 1) \quad \forall i \\ & x_j \le y_j \forall j \\ & -x_j \le y_j \forall j \\ & l \le x \le u \end{array}$$