1

Två-stegsmodeller med (blandad) heltals-recourse

- Varför heltalskrav på variabler?
- Logiska villkor:
  - på/av-beslut: 0/1-variabler
  - Välj exakt ett av ett antal alternativ
  - Kopplingar i nätverk
- Andra villkor:
  - Köp/sälj endast i hela partier
  - Skicka ett antal fraktfordon
  - Uppfyll minst k av n st bivillkor
- Modeller med heltalskrav tar generellt mycket längre tid att lösa (jfr LP—lösning ej säkert i en extrempunkt)

2

Lösningsansatser för blandade heltalsmodeller

- LP + avrundning: Dåligt!
- Branch & bound med LP-relaxering: ex

$$\begin{array}{lrcll} \min & c_1x_1 + c_2x_2 & & & \\ \text{då} & a_1x_1 + a_2x_2 & \leq & b & \text{(relaxering)} \\ & x_1, x_2 & \in & \{0,1\} & \Rightarrow \quad 0 \leq x_1 \leq 1, \;\; 0 \leq x_2 \leq 1 \end{array}$$

Lös LP $\Rightarrow$ t.ex. $x_1^{LP} \notin \{0,1\}$: Partitionera tillåtna mängden: $\{x \mid x_1 = 0\}$ och $\{x \mid x_1 = 1\}$. I värsta fall $(2^{n+1} - 1)$ LP-problem.

- Lagrange-relaxering ($\Rightarrow$ enklare bivillkor)
- L-shaped (generalisering: Benders)—lämpligt vid osäkra indata
- Polyederteori: (försök) beskriv(a) konvexa höljet av tillåtna mängden—kan ge orimligt många bivillkor

3

L-shaped/Benders–algoritmen för problem med heltalskrav och osäkra indata

- HELTALIGA STEG 1-VARIABLER:
  - **Steg 1-problemet:** minimera styckvis linjär, konvex funktion över diskret mängd—kan ta lång tid att lösa
  - **Steg 2-problemet:** LP
- HELTALIGA STEG 2-VARIABLER:
  - **Steg 1-problemet:** minimera styckvis linjär, *diskontinuerlig* funktion över polyedrisk mängd—teoretiska svårigheter
  - **Steg 2-problemet:** minimera linjär funktion över diskret mängd—kan vara lätt eller ta lång tid att lösa
- HELTALIGA STEG 1- OCH STEG 2-VARIABLER:
  - Kan ha alla svåra egenskaper ovan

4

Ett litet exempel med heltaligt recourseproblem

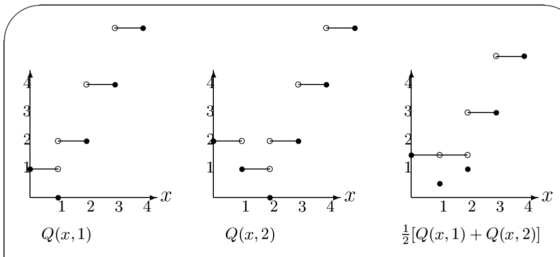
$$Q(x,\xi) = \min\{2y_1 + y_2 \mid y_1 \geq x - \xi, y_2 \geq \xi - x, y \geq 0, \text{ heltal}\}$$

$$\Xi = \{1,2\}, \qquad P(\xi = 1) = P(\xi = 2) = \frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{rcl} Q(x,1) & = & \min\{2y_1 + y_2 \mid y_1 \geq x - 1, y_2 \geq 1 - x, y \geq 0, \text{ heltal}\} \\ \Rightarrow & & y_1 = \max\{0; \lceil x-1 \rceil\}, \qquad y_2 = \max\{0; \lceil 1-x \rceil\} \\ \Rightarrow Q(x,1) & = & 2 \cdot \max\{0; \lceil x-1 \rceil\} + \max\{0; \lceil 1-x \rceil\} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} Q(x,2) & = & \min\{2y_1 + y_2 \mid y_1 \geq x - 2, y_2 \geq 2 - x, y \geq 0, \text{ heltal}\} \\ \Rightarrow & & y_1 = \max\{0; \lceil x-2 \rceil\}, \qquad y_2 = \max\{0; \lceil 2-x \rceil\} \\ \Rightarrow Q(x,2) & = & 2 \cdot \max\{0; \lceil x-2 \rceil\} + \max\{0; \lceil 2-x \rceil\} \end{array}$$

5

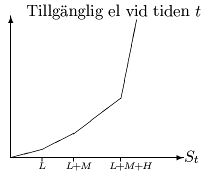


- Recourse-funktionen $\mathcal{Q}(x) = \frac{1}{2}[Q(x,1) + Q(x,2)]$ är diskontinuerlig, *ej* konvex!
- Om utfallsrummet Ξ och fördelningsfunktionen är kontinuerliga så kan $\mathcal{Q}$ vara kontinuerlig

6

Optimering av eldistribution m.h.a. tvåstegs stokastiska heltalsmodeller

- Eldistributörer skriver kontrakt med kraftverk
- Kvoter $L/M/H$ och priser c^1, c^2, c^3, c^4 bestäms i årliga kontrakt
- Kvoter $\leftrightarrow$ enhetspriser: $c^1 < c^2 < c^3 \ll c^4$



$S_t = x_t^1 + x_t^2 + x_t^3 + x_t^4$

$0 \leq x_t^1 \leq L$

$0 \leq x_t^2 \leq M$

$0 \leq x_t^3 \leq H$

$0 \leq x_t^4$

$c^1 = 0.04, \; c^2 = 0.05, \; c^3 = 0.09$

$c^4 = 1.25$ (straff)

$\Rightarrow x_t^i > 0$ endast om $x_t^{i-1} = L/M/H$

Minimera distributörens förväntade totala elkostnad

7

Kontrakt med små generatorer

- Bestäm ett dygn i förväg
- Växthus (el är en biprodukt till värme, alt. kan "stängas av" korta stunder)
- Sjukhus (säkerhetsgeneratorer kan normalt användas till att sälja el)
- Industrier (kan stängas av korta stunder—el blir över)
- Generatorer kan antingen producera på en fix nivå, alternativt stängas av $\Rightarrow \{0,1\}$-variabler
- Kostnader: per timma samt för på/av

8

Variabler

$$y_t^j = \begin{cases} 1 & \text{om generator } j \text{ är på under timma } t \\ 0 & \text{annars} \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \text{Kostnad: } q^j \\ \text{Kapacitet: } b^j \end{array}$$

$$z_t^j = \begin{cases} 1 & \text{om generator } j \text{ startas under timma } t \\ 0 & \text{annars} \end{cases} \qquad \text{Kostnad: } r^j$$

$$\Rightarrow z_t^j = \max\{y_t^j - y_{t-1}^j; 0\}$$

$x_t^1 + x_t^2 + x_t^3 + x_t^4 =$ mängd el från kraftverk som distribueras, fördelad på olika kvoter

Regler—begränsningar $[(y^j, z^j) \in C^j]$

$\sum_{t \in T_0^j} y_t^j = 0$	Gen. j kan inte producera under timmarna T_0^j (mängd)
$m_1^j \le \sum_{t=0}^{23} y_t^j \le M_1^j$	Måste producera under min m_1^j och max M_1^j timmar
$m_2^j \le \sum_{t=0}^{23} z_t^j \le M_2^j$	På/av min m_2^j och max M_2^j ggr
$\sum_{s=t}^{t+m_3^j-1} y_s^j \ge m_3^j z_t^j$	Om gen. j startas måste den vara på min m_3^j
$\sum_{s=t}^{t+M_3^j-1} y_s^j \le M_3^j$	och max M_3^j timmar

Scenarier

- Representativa dagar:
  $\{$vardagar, lördagar, söndagar, speciella helgdagar$\} \times 4$ säsonger

$\Rightarrow$ 16 olika typer av dagar

- För varje typ av dag, i, finns K^i st möjliga efterfrågemönster w^{ik}, $k = 1, \ldots, K^i$ (där $w^{ik} = (w_0^{ik}, \ldots, w_{23}^{ik})$ för 24 timmar)
  $\Rightarrow \sum_{i=1}^{16} K^i$ st scenarier
- Sannolikheten för dag av typ i och mönster k: $p^{ik} = P(w = w^{ik})$
- Andelen dagar av typ i per år: $\sum_{k=1}^{K^i} p^{ik}$
- Givet kvoter (L, M, H) och ett efterfrågemönster för en dag, w^{ik}: minimera kostnaden att tillgodose efterfrågan

Steg 2-problem (blandad heltalsmodell)

$$
\begin{aligned}
v(L,M,H,w) = \min_{x,y,z} \quad & \sum_{t=0}^{23} \left(\sum_{i=1}^{4} c^i x_t^i + \sum_j (q^j y_t^j + r^j z_t^j) \right) \\
\text{då} \quad & \sum_{i=1}^{4} x_t^i + \sum_j b^j y_t^j \ge w_t, \quad t = 0, \ldots, 23 \\
& x_t^1 \le L,\ x_t^2 \le M,\ x_t^3 \le H, \quad t = 0, \ldots, 23 \\
& (y^j, z^j) \in C^j, \quad \forall j \\
& x_t^i \ge 0, \quad \forall t, i \\
& y_t^j, z_t^j \in \{0, 1\}, \quad \forall t, j
\end{aligned}
$$

Steg 1-problem

$$\min_{L,M,H \ge 0} D^1 L + D^2 M + D^3 H + 365 \cdot E_w v(L, M, H, w)$$

D^i = kostnad för att reservera kapaciteter enligt kvot/pris-modellen

Steg 1: Kontrakt med huvudleverantör om intervall för olika priser

Steg 2: Kontrakt med små leverantörer varje dag (i morgon) då efterfrågan är (nästan) känd — heltalskrav

Lösningsmetoder som använts/tänkt att använda:
valid inequalities $\Rightarrow$ konvexa höljet av C^j, Lagrange-relaxering av steg 2-problemet, stokastisk variant av Branch-and-bound algoritmen