Ett exempel från spannmålsodling

- På 500 tunnland skall odlas vete, majs och sockerbetor.
- Kostnad för sådd ($/tunnland): vete: 150, majs: 230, betor: 260
- Eget behov av skörd (ton): vete: 200, majs: 240
- Avkastning (ton/tunnland) vete:$\mathbf{a}_1$, majs:$\mathbf{a}_2$, betor:$\mathbf{a}_3$ (OSÄKER)
- Inköpskostnad ($/ton): vete: 238, majs: 210
- Försäljningspris ($/ton) vete: 170, majs: 150, betor: 36 / 10
- Maximalt 6000 ton betor får säljas till det högre priset

Variabler

x_j : antal tunnland som besås med gröda j

(1: vete, 2: majs, 3: sockerbetor)

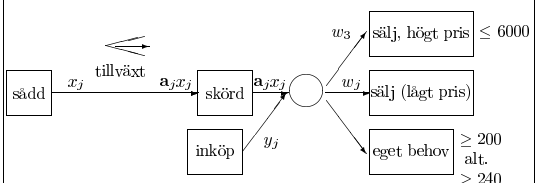
y_j : antal ton av gröda $j = 1, 2$ som köps in för eget behov

w_j : antal ton av skörden av gröda $j = 1, 2, 3, 4$ som säljs

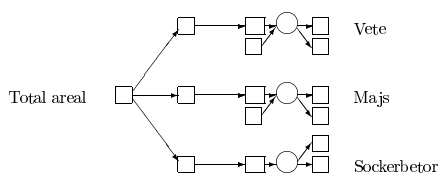
(3: sockerbetor, högt pris)

(4: sockerbetor, lågt pris)

Flödesschema för en gröda



Flödesschema för alla grödorna



Optimeringsmodell (minimera kostnader)

Antag att avkastningen är den förväntade, $a = (2.5, 3, 20)$

$$
\begin{aligned}
z^* = \min \quad & 150x_1 + 230x_2 + 260x_3 && \text{sådd} \\
& +238y_1 + 210y_2 && \text{köp} \\
& -170w_1 - 150w_2 - 36w_3 - 10w_4 && \text{sälj}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{då} \quad x_1 + x_2 + x_3 &\leq 500 && \text{tunnland} \\
2.5 \cdot x_1 + y_1 - w_1 &\geq 200 && \text{min.behov vete} \\
3 \cdot x_2 + y_2 - w_2 &\geq 240 && \text{min.behov majs} \\
20 \cdot x_3 - w_3 - w_4 &\geq 0 && \text{sälj sockerbetor} \\
w_3 &\leq 6000 && \text{max kvot betor} \\
x_j, y_j, w_j &\geq 0, \quad \forall j
\end{aligned}
$$

Optimallösning vid förväntad avkastning

Om avkastningen **antas vara och blir** som förväntat fås lösningen:

$$x^{\text{ex}} = \begin{pmatrix} 120 \\ 80 \\ 300 \end{pmatrix} \quad y^{\text{ex}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad w^{\text{ex}} = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 6000 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Årets vinst $= -z^{\text{ex}} =$ \$ 118 600

Antag: Varje år perfekt information om årets avkastning $\Rightarrow$ Deterministisk modell

Antagande och utfall: avkastning 20% under/över väntevärdena

$a^{\text{lo}} = (2, 2.4, 16)$ och $a^{\text{hi}} = (3, 3.6, 24) \Rightarrow$ Optimallösningar:

$$x^{\text{lo}} = \begin{pmatrix} 100 \\ 25 \\ 375 \end{pmatrix} \; y^{\text{lo}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 180 \end{pmatrix} \; w^{\text{lo}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6000 \\ 0 \end{pmatrix} \quad -z^{\text{lo}} = \text{\$ 59 950}$$

$$x^{\text{hi}} = \begin{pmatrix} 183.33 \\ 66.67 \\ 250 \end{pmatrix} \; y^{\text{hi}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \; w^{\text{hi}} = \begin{pmatrix} 350 \\ 0 \\ 6000 \\ 0 \end{pmatrix} \quad -z^{\text{hi}} = \text{\$ 167 667}$$

Steg ett-beslut—före sådd

Gissa avkastningen (dålig/förväntad/bra) $\Rightarrow x$-lösning.

Steg två-beslut—efter skörd

Observera avkastningen och bestäm vad som skall säljas och/eller köpas in $\Rightarrow (y, w)$-lösning.

Vinst, $		Observerad avkastning			
		-20%	förväntad	+20%	Medelv.
Gissad avkast-ning	-20%	59 950	86 600	113 250	86 600
	förväntad	55 120	118 600	148 000	107 240
	+20%	47 700	107 682	167 667	107 683

Vinst vid olika gissningar och avkastningar

Antag att 3 olika scenarier kan inträffa

Alla med sannolikhet $\frac{1}{3}$

x_j = antal tunnland som besås med gröda j

SEDAN GÅR TIDEN ETT TAG

OCH NÅGOT SCENARIO INTRÄFFAR

y_{js} = antal ton av gröda j som köps in vid scenario s

w_{js} = antal ton av gröda j som säljs vid scenario s

Scenario 1: 20% lägre avkastning: $a_{\cdot 1} = (2, 2.4, 16)$

Scenario 2: förväntad avkastning: $a_{\cdot 2} = (2.5, 3, 20)$

Scenario 3: 20% högre avkastning: $a_{\cdot 3} = (3, 3.6, 24)$

Scenario-modell

$$\begin{aligned}\min \quad & 150x_1 + 230x_2 + 260x_3 \\ & + \tfrac{1}{3}\sum_{s=1}^{3}(238y_{1s} + 210y_{2s} \\ & \qquad - 170w_{1s} - 150w_{2s} - 36w_{3s} - 10w_{4s})\end{aligned}$$

då

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\le 500 && \\ a_{1s}x_1 + y_{1s} - w_{1s} &\ge 200 && s = 1,2,3 \\ a_{2s}x_2 + y_{2s} - w_{2s} &\ge 240 && s = 1,2,3 \\ a_{3s}x_3 - w_{3s} - w_{4s} &\ge 0 && s = 1,2,3 \\ w_{3s} &\le 6000 && s = 1,2,3 \\ x_j, y_{js}, w_{js} &\ge 0 && \forall j, s \end{aligned}$$

Optimallösning vid 3 olika scenarier

$$x^* = \begin{pmatrix} 170 \\ 80 \\ 250 \end{pmatrix} \quad y^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 48 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad w^* = \begin{pmatrix} 140 & 225 & 310 \\ 0 & 0 & 48 \\ 4000 & 5000 & 6000 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$s = 1$ (låg avkastning) $\Rightarrow$ $-z_1^* = \$\ \ 48\ 820$

$s = 2$ (förväntad avkastning) $\Rightarrow$ $-z_2^* = \$\,109\ 350$

$s = 3$ (hög avkastning) $\Rightarrow$ $-z_3^* = \$\,167\ 000$

Medelvärde under många år: $-z^* = \$\,108\ 390$

Vad är det värt att få titta i kristallkulan?