1

Värdet av stokastisk optimering

När tjänar vi på att använda stokastisk optimering? Kan vi använda en enklare modell? Vad förlorar vi på detta? Kan vi få övre och undre gränser på kostnaden?

First stage feasibility set
I ett tvåstegsproblem är detta de värden på steg-1 variablerna för vilka steg 2 är lösbart. Om vi förenklar problemet riskerar vi att finna en steg-1 lösning vilken saknar tillåtna lösningar i steg 2.

I fortsättningen antar vi att vi har relatively complete recource, d.v.s. vi kan inte göra steg två otillåtet med ett dåligt val i steg 1.

2

2-stegsproblem

Vi betraktar följande problem

$$\begin{aligned} \min \quad & c^{\mathrm{T}}x + q^{\mathrm{T}}y(\omega) \\ \text{då} \quad & Ax = b \\ & T(\xi(\omega))x + Wy = h(\xi(\omega)) \end{aligned}$$

Som tidigare kan vi skriva

$$\begin{aligned} Q(x, \xi(\omega)) &= \min q^{\mathrm{T}}y(\omega) \\ \text{då} \quad & Wy(\omega) = h(\xi(\omega)) - T(\xi(\omega))x \end{aligned}$$

3

2-stegsproblem

Vi definierar även

$$\begin{aligned} g(x, \xi(\omega)) &= c^{\mathrm{T}}x + Q(x, \xi(\omega)) \\ Y(x, \xi(\omega)) &= \{y | Wy = h(\xi(\omega)) - T(\xi(\omega))x\} \\ X_0 &= \{x | Ax = b\} \end{aligned}$$

4

2-stegsproblem

Vi har nu det optimala värdet för recourceproblemet (TS=Two-stage)

$$TS = \min_{x \in X_0} \mathsf{E}_\omega[g(x, \xi(\omega))]$$

med optimal lösning

$$x^*$$

Om de stokastiska variablerna i problemet har diskreta fördelningar har vi

$$\begin{aligned} TS &= \min_{x \in X_0} \sum_{i=1}^{n} p^i g(x, \xi^i) \\ p^i &= P(\xi(\omega) = \xi^i) \end{aligned}$$

5

Expected value solution

Vad händer om vi bara stoppar in väntevärden? Sätt

$$\bar{T} = \sum_{i=1}^{n} p^i T(\xi^i), \qquad \bar{h} = \sum_{i=1}^{n} p^i h(\xi^i)$$

Vi får nu problemet (EV=Expected value)

$$EV = \min_{x \in X_0} g(x, \mathsf{E}[\xi(\omega)])$$

där vi har

$$\begin{aligned} g(x, \mathsf{E}[\xi(\omega)]) &= \min q^{\mathrm{T}}y \\ & \text{Subject to } \bar{T}x + Wy = \bar{h} \end{aligned}$$

med optimal lösning $\bar{x}$

6

Mått på osäkerhet

Ett mått på hur mycket osäkerheten påverkar oss kan vi nu få genom att beräkna EEV(Expected value of using the expected solution)

$$EEV = \mathsf{E}[g(\bar{x}, \xi(\omega))]$$

Vi får nu värdet av den stokastiska lösningen (VSS) som

$$VSS = EEV - TS$$

Vi vet att $TS \leq EEV$ ty $\bar{x}$ är tillåten men ej nödvändigtvis optimal i originalproblemet

7

Value of perfect information

Vad skulle vi vara beredda att betala för en kristallkula viken förutsäger framtiden? Detta avgörs av värdet WS (Wait and see solution). Om vi hela tiden vet vilket utfallet kommer att bli, kommer vi att lösa problemet

$$\min_{x \in X_0} \quad g(x, \xi(\omega))$$

för varje enskilt ω vilket kommer att ge oss en optimal lösning $x(\omega)$. Vi får nu

$$WS = \mathsf{E}_\omega[\min_{x(\omega) \in X_0} g(x(\omega), \xi(\omega))]$$

8

Expected value of perfect information

Vi kan nu få fram det väntade värdet av perfekt information (EVPI) som $TS - WS$ (för minproblem, $WS - TS$ för max). Detta är samtidigt det högsta pris vi är beredda att betala för att exakt kunna förutsäga framtiden.

Då x^* (optimala lösningen för recourseproblemet) är tillåten i varje problem

$$\min_{x(\omega) \in X_0} g(x(\omega), \xi(\omega))$$

men ej nödvändigtvis optimal har vi $EVPI \geq 0$ eller om vi sammanfattar

$$WS \leq TS \leq EEV$$

Jordbruksexemplet

Om vi minns jordpruksexemplet får vi

TS	-108 390
EEV	-107 240
WS	-115 406

vilket ger VSS=$108390 - 107240 = 1150$

samt EVPI =$115406 - 108390 = 7016$

Konvexitet

Ibland har vi att $Q(x, \xi(\omega))$ är konvex i x för varje ω. Ett exempel på detta är när vi har just

$$Q(x, \xi(\omega)) = \min_{y \in Y(x,\omega)} q^{\mathrm{T}} y$$
$$Y(x, \omega) = \{y | Wy = h(\xi(\omega)) - T(\xi(\omega))x\}$$

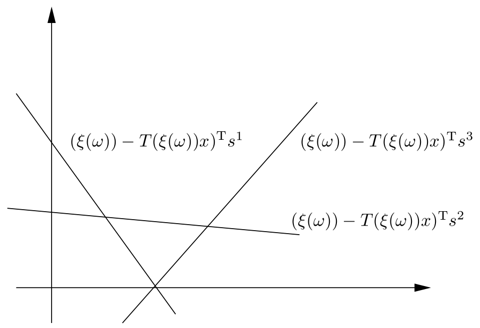
För att se detta tar vi fram dualen till problemet.

$$Q(x, \omega) = \max \quad (h(\xi(\omega)) - T(\xi(\omega))x)^{\mathrm{T}} s$$
$$\text{då} \quad W^{\mathrm{T}} s \leq q$$

Den tillåtna polyedern är oberoende av x varför ett hörn av polyedern är optimalt i taget. Då ett givet hörn s^i är optimalt har vi

$$Q(x, \omega) = (h(\xi(\omega)) - T(\xi(\omega))x)^{\mathrm{T}} s^i$$

Konvexitet



Konvexitet

Vi fixerar nu x till ett visst värde.

$$Q(x, \omega) = \max \quad (h(\xi(\omega)) - T(\xi(\omega))x)^{\mathrm{T}} s$$
$$\text{då} \quad W^{\mathrm{T}} s \leq q$$

Vi finner att målfunktionen $(h(\xi(\omega))) - T(\xi(\omega))x)$ är en linjär funktion av $\xi(\omega)$. Därmed är målfunktionen konvex i både x och ξ var och en för sig(dock ej samtidigt.!). Om vi vidare antar att T är fix får vi att $g(x, \omega)$ är konvex både i x och ξ.

Jensens olikhet

Vi minns konvexitetsolikheten. För en konvex funktion f gäller

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y), \quad \lambda \in [0,1], \forall x, y$$

Mer generellt har vi Jensens olikhet.

$$f(\sum \lambda_i x^i) \leq \sum \lambda_i f(x^i)$$
$$\sum \lambda_i = 1$$
$$\lambda_i \geq 0$$

Detta gäller även vid integration varför vi har

$$f(\int_\Omega \xi(\omega) dP(\omega)) \leq \int_\Omega f(\xi(\omega)) dP(\omega)$$

Jensens olikhet

Om vi därför har en funktion $g(x, \xi)$ vilken är konvex i ξ gäller därför att

$$g(x, \int_\Omega \xi(\omega) dP(\omega)) \leq \int_\Omega g(x, \xi(\omega)) dP(\omega)$$

Då denna olikhet gäller för alla x gäller den även för $\bar{x}$ Därmed har vi

$$EV \leq EEV$$

Observera att detta beror på konvexiteten hos $g(x, \xi)$ i ξ. Om vi har

$$\min_{x \in \Re} g(x, \xi) = (x^2 + 1)\xi(1 - \xi)$$

med ξ likafördelad på $[0, 1]$ så gäller inte utsagan.

Konvexitet

Vi antar nu att $g(x, \xi)$ är konvex i både x och ξ (samtidigt). Då får vi att

$$g(\mathsf{E}[x_\xi], \mathsf{E}[\xi]) \leq \mathsf{E}[g(x_\xi, \xi)] \quad (1)$$
$$x_\xi = \mathrm{argmin}_x g(x, \xi) \quad (2)$$

Då vi vet att

$$\mathrm{EV} = g(\bar{x}, \mathsf{E}[\xi]) \leq g(\mathsf{E}[x_\xi], \mathsf{E}[\xi])$$

får vi att

$$\mathrm{EV} \leq \mathrm{WS}$$

Konvexitet

Om $g(x, \xi)$ är konvex i x och ξ var för sig får vi att

$$g(x, \mathsf{E}[\xi]) \leq \mathsf{E}[g(x, \xi)], \quad \forall x$$

Minimerar vi detta över $x \in X_0$ får vi

$$\mathrm{EV} = \min_{x \in X_0} g(x, \mathsf{E}[\xi]) \leq \min_{x \in X_0} \mathsf{E}[g(x, \xi)] = \mathrm{TS}$$

17

Konvexitet

Vi kan nu sammanfatta: Om vi har $g(x,\xi)$ konvex i båda variablerna samtidigt har vi att.

$$EV \le WS \le TS \le EEV$$
$$EVPI = TS - WS \le EEV - EV$$
$$VSS = EEV - TS \le EEV - EV$$

Då både EEV och EV är lätta att beräkna (Vi löser endast ett fall i taget), kan vi få lätt beräknade gränser som skattar maximala vinsten av att använda stokastisk optimering.

18

Konvexitet

Har vi konvexitet i ξ och x var och en för sig gäller endast

$$WS \le TS \le EEV$$
$$EV \le TS \le EEV$$

vilket ger att

$$EVPI = TS - WS \le EEV - WS$$
$$VSS = EEV - TS \le EEV - \max(EV, WS)$$

19

Kontinuerliga stokastiska variabler

Allt som sagts tidigare gäller även om våra variabler är kontinuerliga. Vi får däremot problem att räkna ut vissa av dessa värden för kontinuerliga variabler.

Vi tittar därför på övre och undre gränser för väntevärdet av konvexa funktioner. Vi drar oss till minnes konvexitetsolikheten

$$g(x) \ge g(y) + \nabla g(y)^{\mathrm{T}}(x-y)$$

20

Kontinuerliga stokastiska variabler

Betrakta en konvex funktion $g(\xi)$, där $\xi(\omega)$ är en stokastisk variabel.

Vi har att

$$g(y) + u^{\mathrm{T}}(\xi - y) \le g(\xi)$$

där u är en subgradient till g i punkten y. Vi har då att

$$\mathsf{E}_\xi[g(y) + u^{\mathrm{T}}(\xi - y)] = g(y) + u^{\mathrm{T}}(\mathsf{E}_\xi[\xi] - y) \le \mathsf{E}_\xi[g(\xi)]$$

Med $y = \mathsf{E}[\xi]$ blir detta Jensen igen.

21

Edmundson-Madansky

Vi har för en konvex funktion

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda)g(y)$$

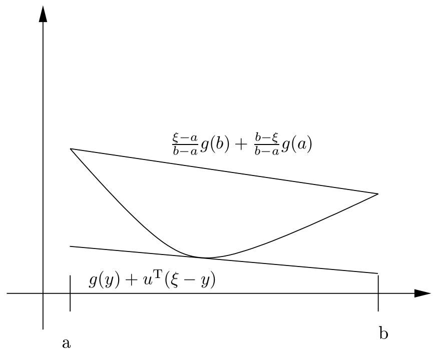
Om vi har endast en stokastisk variabel ξ med utfallsrum $[a,b]$ har vi därför för alla x att

$$g(x,\xi) \le \frac{\xi - a}{b-a}g(x,b) + \frac{b-\xi}{b-a}g(x,a)$$

Integrerar vi detta får vi

$$\mathsf{E}_\xi[g(x,\xi)] \le \mathsf{E}[\frac{\xi - a}{b-a}g(x,b) + \frac{b-\xi}{b-a}g(x,a)] = \frac{\mathsf{E}[\xi] - a}{b-a}g(x,b) + \frac{b-\mathsf{E}[\xi]}{b-a}g(x,a)$$

22



23

gränser

Detta innebär att vi kan få fram en övre och undre gräns för TS, även om de slumpmässiga variablerna är kontinuerliga.

Vi kan betrakta gränserna som givna av approximationer till funktionen Vi kan lika gärna de dem som givna av approximationer av tähetsfunktionen för de stokastiska variablerna. I fallet för de undre gränsen ersätter vi täthetsfunktionen med en diskret funktion med sannolikhet 1 i $\mathsf{E}[\xi]$, och i fall 2 ersätter vi den med en Bernoulli-fördelning med sannolikhet $\frac{\mathsf{E}[\xi]-a}{b-a}$ i b och $\frac{b-\mathsf{E}[\xi]}{b-a}$ i $g(a)$.

24

Samanfattinig

Vi har en funktion $g(x,\xi)$ som tidigare, med $\xi \in [a,b]$. Vi antar att $g(x,\xi)$ är konvex i x och ξ var för sig. Vi söker värdet av

$$\min_{x \in X_0} \mathsf{E}[g(x,\xi)]$$

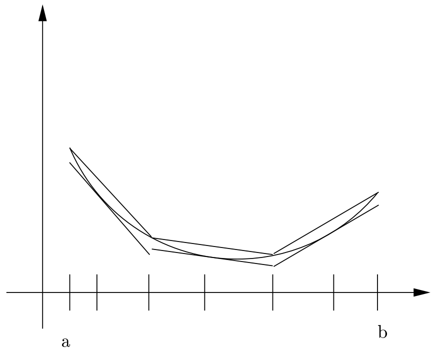
Vi kan få en undre gräns som

$$\min_{x \in X_0} g(x, \mathsf{E}[\xi])$$

Vi kan få en övre gräns som

$$\min_{x \in X_0} \frac{\mathsf{E}[\xi] - a}{b-a}g(x,b) + \frac{b - \mathsf{E}[\xi]}{b-a}g(x,a)$$

25



26

Samanfattinig

Här får vi den undre gränsen som

$$\min_{x\in X_0} \mathsf{E}_{i\in I^1}[g(x,\xi_i^1)]$$

Den övre gränsen fås som

$$\min_{x\in X_0} \mathsf{E}_{i\in I^2}[g(x,\xi_i^2)]$$

27