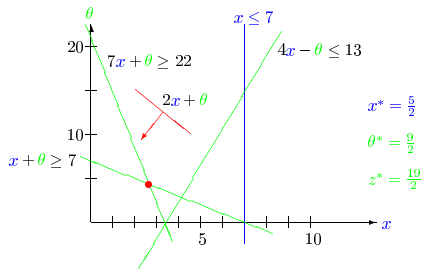
LP-formulering av exemplet

$$\mathcal{Q}(x) = \max\{22-7x;\ 7-x;\ -13+4x\}$$

Hjälpvariabel: θ representerar $\mathcal{Q}(x)$ $\quad\Longrightarrow$

$$\begin{bmatrix} \min & 2x & + & \theta \\ \text{då} & x & \le & 7 \\ & x & \ge & 0 \\ & \theta & \ge & 22-7x \\ & \theta & \ge & 7-x \\ & \theta & \ge & -13+4x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \min & 2x & +\theta & & \\ \text{då} & x & & \le & 7 \\ & x & & \ge & 0 \\ & 7x & +\theta & \ge & 22 \\ & x & +\theta & \ge & 7 \\ & 4x & -\theta & \le & 13 \end{bmatrix}$$

LP-formulering av exemplet



Hur hittar vi y^*?

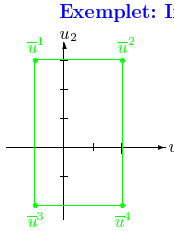
Lös subproblemet med optimalt värde på x:

$x^* = \frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{Q}(x^*) =$

$$\begin{bmatrix} \min & 2y_1 + y_2 \\ \text{då} & y_1 - y_2 = 5 - 2\cdot\frac{5}{2} = 0 \\ & y_1, y_2 \ge 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \min & 3y_3 + 2y_4 \\ \text{då} & y_3 - y_4 = 4 - \frac{5}{2} = \frac{3}{2} \\ & y_3, y_4 \ge 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow y_1^* = y_2^* = y_4^* = 0, \quad y_3^* = \frac{3}{2}, \quad \mathcal{Q}(x^*) = \theta^* = \frac{9}{2}$

Exemplet: Inre representation av dualen



$\overline{u}^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \overline{u}^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \mathcal{T} = \{1,2,3,4\}$

$\mathcal{S} = \emptyset$

$\overline{u}^3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \overline{u}^4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$u_1 \Leftrightarrow \ell = 1$

$u_2 \Leftrightarrow \ell = 2$

$$\mathcal{Q}(x) = \max_\lambda \left\{ \sum_{t=1}^4 (5-2x, 4-x)^T \overline{u}^t \lambda_t \;\middle|\; \sum_{t=1}^4 \lambda_t = 1; \lambda_t \ge 0,\ t = 1,\dots,4 \right\}$$

$$= \max_\lambda \quad (7-x)\lambda_1 + (22-7x)\lambda_2 + (-13+4x)\lambda_3 + (2-2x)\lambda_4$$
$$\text{då} \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1; \qquad \lambda_t \ge 0, \quad t = 1,\dots,4$$

Duala extremlösningar $\Leftrightarrow$ linjära segment hos $\mathcal{Q}$

$7-x > \max\{22-7x; 4x-13; 2-2x\} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5}{2} < x < 4 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = 1$

$22-7x > \max\{7-x; 4x-13; 2-2x\} \quad \Leftrightarrow \quad x < \frac{5}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_2 = 1$

$4x-13 > \max\{7-x; 22-7x; 2-2x\} \quad \Leftrightarrow \quad x > 4 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_3 = 1$

$2-2x > \max\{7-x; 22-7x; 4x-13\} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_4 = 1$

Konvexkombinatiner av duala extremlösningar $\Leftrightarrow$ skärning mellan linjära segment hos $\mathcal{Q}$

$7-x = 22-7x \ge \max\{4x-13; 2-2x\} \Leftrightarrow \quad x = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1$

$7-x = 4x-13 \ge \max\{22-7x; 2-2x\} \Leftrightarrow \quad x = 4 \Leftrightarrow \quad \lambda_1 + \lambda_3 = 1$

$\mathcal{Q}(x)$ är styckvis linjär

- $\mathcal{Q}(x)$ är implicit definierad, som lösningen till ett optimeringsproblem
- Antal segment ($\theta \ge \cdots$, $0 \ge \cdots$) är väldigt många ($= |\mathcal{T}| + |\mathcal{S}|$)
- Approximera $\mathcal{Q}(x)$ med hjälp av de "hittills funna" segmenten
- Varje extrempunkt $\overline{u}_\ell^t$ svarar mot ett segment hos $\mathcal{Q}$
- Varje extremriktning $\overline{u}_\ell^s$ svarar mot ett bivillkor (ett lodrätt segment hos $\mathcal{Q}$) som skär bort ett otillåtet x

Hela problemet kan skrivas som

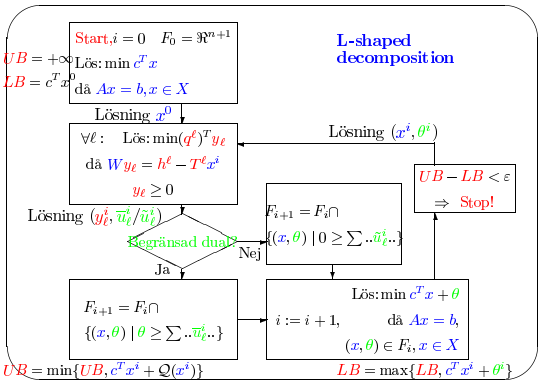
$$\begin{aligned} z^* = \min \quad & c^T x & + & \theta \\ \text{då} \quad & Ax & = & b \\ & \theta & \ge & \sum_{\ell\in\mathcal{L}} p^\ell (\overline{u}_\ell^t)^T (h^\ell - T^\ell x),\ t \in \mathcal{T} \quad (*) \\ & 0 & \ge & \sum_{\ell\in\mathcal{L}} p^\ell (\overline{u}_\ell^s)^T (h^\ell - T^\ell x),\ s \in \mathcal{S} \quad (**) \\ & x & \in & X \end{aligned}$$

- Bivillkoren $(*)$ och $(**)$ genereras allteftersom de behövs
- I värsta fall genereras alla bivillkor innan man hittat en optimallösning—ändligt många (duala extrempktr/riktn)
- Oftast—vilket är vitsen—genereras bara en del av bivillkoren

Algoritm (L-shaped decomposition)

1. $i = 0$, $F_0 = \Re^{n+1}$, $LB = -\infty$, $UB = +\infty$ Lös masterproblemet $\min\{c^T x \mid Ax = b, x \in X\}$ $\Rightarrow$ Lösning x^0, $LB = c^T x^0$
2. Lös subproblemen $\min\{(q^\ell)^T y \mid Wy = h^\ell - T^\ell x^i, y \ge 0\}$, $\ell \in \mathcal{L}$ $\Rightarrow$ Primal lösning y_i^ℓ och dual lösning $\overline{u}_i^\ell$ (alt. $\overline{u}_i^\ell$)
3. Om duallösningen begränsad (d.v.s. x^i tillåten) så låt $F_{i+1} := F_i \cap \{(x,\theta) \mid \theta \ge \sum_{\ell\in\mathcal{L}} p^\ell (\overline{u}_\ell^t)^T (h^\ell - T^\ell x)\}$, $UB = \min\{UB; c^T x^i + \sum_{\ell\in\mathcal{L}} p^\ell (q^\ell)^T y^i\}$
   Om duallösningen obegränsad (d.v.s. x^i ej tillåten) så låt $F_{i+1} := F_i \cap \{(x,\theta) \mid 0 \ge \sum_{\ell\in\mathcal{L}} p^\ell (\overline{u}_\ell^t)^T (h^\ell - T^\ell x)\}$
4. Låt $i := i+1$. Lös masterproblemet $\min\{c^T x + \theta \mid Ax = b, (x,\theta) \in F_i, x \in X\}$ $\Rightarrow$ Lösning (x^i, θ^i), $LB = \max\{LB; c^T x^i + \theta^i\}$. Gå till 2.

L-shaped decomposition



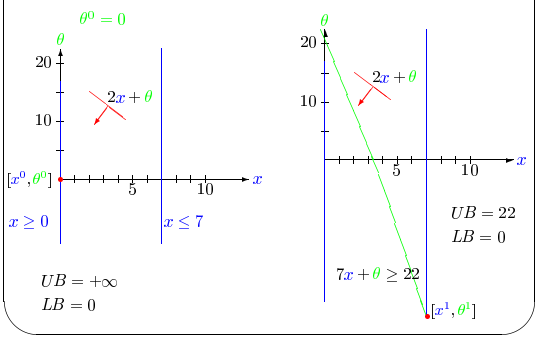
Exemplet igen

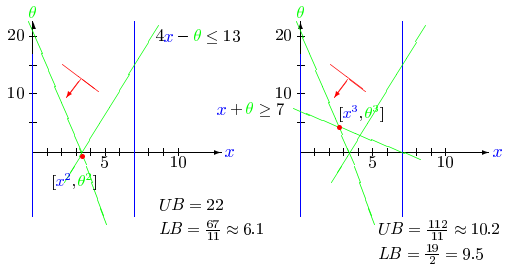
- Master ($\theta^0=0$): $\min\{2x \mid 0\leq x\leq 7\} \Rightarrow x^0=0,\ LB=0$
- Subproblem:
  $\min\{2y_1+y_2 \mid y_1-y_2=5; y_1,y_2\geq 0\} \Rightarrow y_1^0=5, y_2^0=0,\ u_1^0=2$
  $\min\{3y_3+2y_4 \mid y_3-y_4=4; y_3,y_4\geq 0\} \Rightarrow y_3^0=4, y_4^0=0,\ u_2^0=3$
  $UB=\min\{\infty; 0+10+12\}=22$
- Nytt bivillkor: $\theta \geq 2\cdot(5-2x)+3\cdot(4-x)=22-7x$
- Master: $\min\{2x+\theta \mid 0\leq x\leq 7;\ \theta\geq 22-7x\}$
  $\Rightarrow x^1=7,\ \theta^1=-27,$
  $LB=\max\{0; 14-27\}=0$

- Subproblem:
  $\min\{2y_1+y_2 \mid y_1-y_2=-9; y_1,y_2\geq 0\}$
  $\Rightarrow y_1^1=0, y_2^1=9,\ u_1^1=-1$
  $\min\{3y_3+2y_4 \mid y_3-y_4=-3; y_3,y_4\geq 0\}$
  $\Rightarrow y_3^1=0, y_4^1=3,\ u_2^1=-2,$
  $UB=\min\{22; 14+9+6\}=22$
- Nytt bivillkor: $\theta \geq (-1)\cdot(5-2x)+(-2)\cdot(4-x)=-13+4x$
- Master: $\min\{2x+\theta \mid 0\leq x\leq 7;\ \theta\geq 22-7x;\ \theta\geq -13+4x\}$
  $\Rightarrow x^2=\frac{35}{11}, \theta^2=-\frac{3}{11},$
  $LB=\max\{0; \frac{70}{11}-\frac{3}{11}\}=\frac{67}{11}$

- Subproblem:
  $\min\{2y_1+y_2 \mid y_1-y_2=-\frac{15}{11}; y_1,y_2\geq 0\} \Rightarrow y_1^2=0, y_2^2=\frac{15}{11},$
  $u_1^2=-1$
  $\min\{3y_3+2y_4 \mid y_3-y_4=\frac{9}{11}; y_3,y_4\geq 0\} \Rightarrow y_3^2=\frac{9}{11}, y_4^2=0,$
  $u_2^2=3,\ UB=\min\{22; \frac{70}{11}+\frac{15}{11}+\frac{27}{11}\}=10+\frac{2}{11}$
- Nytt bivillkor: $\theta \geq (-1)\cdot(5-2x)+3\cdot(4-x)=7-x$
- Master:
  $\min\{2x+\theta \mid 0\leq x\leq 7;\ \theta\geq 22-7x;\ \theta\geq -13+4x;\ \theta\geq 7-x\}$
  $\Rightarrow x^3=\frac{5}{2}, \theta^3=\frac{9}{2},\ LB=\max\{\frac{67}{11}; 5+\frac{9}{2}\}=\frac{19}{2}$
- Subproblem:
  $\min\{2y_1+y_2 \mid y_1-y_2=0; y_1,y_2\geq 0\} \Rightarrow y_1^3=0, y_2^3=0,\ u_1^3=-1$
  $\min\{3y_3+2y_4 \mid y_3-y_4=\frac{3}{2}; y_3,y_4\geq 0\} \Rightarrow y_3^3=\frac{3}{2}, y_4^3=0,\ u_2^3=3$
  $UB=\min\{10+\frac{2}{11}; 5+\frac{9}{2}\}=\frac{19}{2}=LB \Rightarrow$ Klart!
- $x^*=\frac{5}{2}, \quad y^*=(0,0,\frac{3}{2},0), \quad z^*=\frac{19}{2}$

Illustration av L-shaped m.h.a. exemplet





Lös subproblem $\Rightarrow$ samma bivillkor $\Rightarrow UB=9.5 \Rightarrow$ Klart!

Recourse

Välj t.ex.

- steg = tid (x före y)—Vettigt ur tillämpnings-synvinkel
- (relativt) lättlöst recourse-problem (matrisen W har "enkel" struktur) — skall lösas många gånger
- Ger ej alltid samma dekomponering av modellen!

$$Q(x,\xi^\ell)=\left[\begin{array}{ll}\min_y & (q^\ell)^T y \\ \text{då} & Wy=h^\ell-T^\ell x \\ & y\geq 0\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ll}\max_u & (h^\ell-T^\ell x)^T u \\ \text{då} & W^T u\leq q^\ell\end{array}\right]$$

- Om q^ℓ är deterministisk ($=q$) har alla recourse-problem samma dualt tillåtet område och tillåtna duala baslösningar!

$\Rightarrow$ Kan utnyttjas för att effektivisera algoritmer!

Recourse-strukturer

- **Fixed recourse:** Matrisen W beror ej av ξ^ℓ
- **Relatively complete recourse matrix** W:
  För varje $\xi^\ell\in\Xi$ och alla $x\in X$ s.t. $Ax=b$
  existerar ett $y\geq 0$ s.t. $Wy=h^\ell-T^\ell x$ ($\Leftrightarrow$ dualen begränsad),
  d.v.s., alla $x\in X$ s.t. $Ax=b$ är "tillåtna"
- **Complete recourse matrix** W:
  För alla $z\in\Re^m$ existerar ett $y\geq 0$ s.t. $Wy=z$
  d.v.s., tillåtenhet oberoende av Ξ.
- **Complete recourse $\Rightarrow$ Relatively complete recourse**
- Om relatively complete recourse *ej* gäller så behövs (lodräta) villkor av typen $0\geq\sum_{\ell\in\mathcal{L}} p^\ell(\hat{u}_\ell^s)^T(h^\ell-T^\ell x)$, ty dualen kan för vissa $x\in X$: $Ax=b$ vara obegränsad

Recourse-strukturer—fortsättning

- **Simple recourse:** $W = (I, -I)$
  Under- resp. överskott i likhetsvillkor modelleras med separata straffkostnader.
- Bivillkoret $T^\ell x = h^\ell$ kan modellerats som $T^\ell x + y_1^\ell - y_2^\ell = h^\ell$
- Generalisering av exemplet ger recourseproblemet (med dual):

$$\begin{bmatrix} \min & q_1^T y_1 + q_2^T y_2 \\ \text{då} & I y_1 - I y_2 = h - Tx \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \max & (h - Tx)^T u \\ \text{då} & Iu \leq q_1 \\ & -Iu \leq q_2 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Recourse-problemet kan lösas analytiskt:

$(h - Tx)_i > 0 \quad \Rightarrow \quad u_i = q_{1_i}, \qquad y_{1_i} = (h - Tx)_i, \quad y_{2_i} = 0$

$(h - Tx)_i < 0 \quad \Rightarrow \quad u_i = -q_{2_i}, \quad y_{2_i} = -(h - Tx)_i, \quad y_{1_i} = 0$

Recourse-strukturer—fortsättning

- **Simple recourse** $\Rightarrow$ **complete recourse**
- **Network recourse:** W beskriver ett nätverksflöde
  (t.ex. fiskeriexemplet) Lättlöst LP-problem
- **Network recourse** $\Rightarrow$ **complete recourse** (oftast)
- **Integer recourse:**
  Recourse-problemet har heltalsvillkor
  Ger icke-kontinuerlig, icke-konvex recourse-funktion $\mathcal{Q}$
  Behandlas senare i kursen