C Modellering och lösning av recourseproblem

Följande övningar ger upphov till stokastiska optimeringsproblem som kan lösas med standard-programvara för linjär (heltals)optimering. Var och en skall formulera matematiska modeller för alla uppgifterna. En av dessa modeller (vilken bestäms vid en föreläsning) skall lösas numeriskt med lämplig lösare (AMPL och Cplex). Beräkna även värdet av den stokastiska lösningen (VSS). Skriv en kort rapport om modellerna, lösningarna och analysera resultaten.

1. [Sektionsindelning i flygplan]

   Flygbolaget Västkustflyg vill bestämma hur man skall dela upp platserna i ett nytt plan på sträckan Göteborg–Malmö. Planet har plats för 200 passagerare i ekonomiklass. En sektion kan avdelas för förstaklasspassagerare, men var och en av dessa stolar tar lika mycket utrymme som två stolar i ekonomiklass. Man kan också ha en sektion för affärsklass; var och en av dessa stolar tar lika mycket utrymme som en och en halv stol i ekonomiklass. Vinsten på en första(affärs)klassbiljett är emellertid 3.3(2.1) gånger vinsten på en ekonomiklassbiljett. När stolarna i planet en gång har blivit indelade i sektioner för olika biljettklasser kan denna indelning inte ändras. Man vet emellertid att planet inte alltid kommer vara fullbokat i alla sektioner. Man antar att tre olika scenarion kommer att inträffa med ungefär lika hög frekvens: (1) vardagsmorgon och -kvällstrafik, (2) helgtrafik och (3) lunchtrafik på vardagar. Under scenario 1 tror man att man kan sälja så mycket som 20 första-, 50 affärs- och 200 ekonomiklassbiljetter. Under scenario 2 är motsvarande värden 10, 25 och 175, och under scenario 3 är de 5, 10 och 150. Antag att man inte kan sälja fler biljetter av en viss klass än det finns stolar i motsvarande sektion eller i någon sektion av bättre klass.

   (I verkligheten kan man tillåta överbokning, men då beaktar man problemet att ta hänsyn till att en del passagerare med reservationer inte dyker upp (no-shows).)

2. [Produktionsplanering]

   Tomatbolaget (TB) tillverkar tomatpuré, ketchup och salsa med hjälp av fyra olika ingredienser: arbetskraft, tomater, socker och kryddor. För framställning av en låda tomatpuréburkar krävs 0.5 mantimmar, 1.0 korg tomater, inget socker och 0.25 burk kryddor. Motsvarande för att framställa en låda ketchupflaskor är 0.8 mantimmar, 0.5 korg tomater, 0.5 påsar socker och 1.0 burk kryddor, och för att framställa en låda salsaburkar krävs 1.0 mantimmar, 0.5 korg tomater, 1.0 påse socker och 3.0 burkar kryddor.

   Företaget skall planera produktionen för de tre följande perioderna. Man har i var och en av perioderna tillgång till 200 mantimmar, 250 korgar tomater, 300 påsar socker och 100 burkar kryddor till ordinarie priser. Dock kan man betala extra för ytterligare resurser enligt: 1.6 per mantimma, 0.4 per tomatkorg, 0.8 per sockerpåse och 0.5 per kryddburk. Om man inte behöver utnyttja allt socker och kryddor i en period så kan kan man spara dem utan kostnad till nästa period; mantimmar och tomater kan dock inte sparas. De ordinarie produktionskostnaderna per låda av produkterna är 1.0 för tomatpuré, 1.5 för ketchup och 2.5 för salsa.

   Efterfrågan i varje period är inte känd med säkerhet förrän efter det att produkterna för den perioden är tillverkade. TB förutsäger att det i varje period finns två olika möjligheter, motsvarande en god och en dålig ekonomi; dessa inträffar med lika stor sannolikhet. I det goda fallet efterfrågas 200 lådor tomatpuré, 40 lådor ketchup och 20 lådor salsa. I det dåliga fallet reduceras dessa siffror till 100, 30 respektive 5. Överproduktion av en produkt i en period kan lagras till nästa period till en kostnad av 0.5, 0.25 och 0.2 per låda av tomatpuré, ketchup respektive salsa. TB räknar också med att kostnaderna (d.v.s., förlust av goodwill) som uppkommer då efterfrågan i någon av perioderna inte tillgodoses är 2.0, 3.0 och 6.0 per låda av tomatpuré, ketchup respektive salsa.

3. [Vattenreglering]

Klarsjö–dammen kontrollerar vattennivån i Klarsjön, en välrenommerad rekreationsort i Drömland. Dammkommisionen vill bestämma hur mycket vatten som skall släppas ut under var och en av de närmaste tre månaderna. Vattennivån i Klarsjön är för närvarande 150mm under högvattennivån. Dammen har kapacitet för en sänkning av vattennivån i sjön med 175mm per månad, men ytterligare nederbörd och avdustning påverkar också dammen.

Vädret kring Klarsjön är mycket varierande. De två första månaderna har liknande väderförhållanden och samma sannolikhetsfördelning för väder. Vädret under var och en av de tre månaderna är oberoende av vädret under övriga månader. I var och en av de två första månaderna är sannolikheten 1/2 för att den naturliga vattenhöjningen blir 100mm, och med sannolikheten 1/4 vardera är den naturliga sänkningen av nivån 50mm, respektive är den naturliga höjningen 250mm. Alla dessa värden motsvarar naturliga förändringar av vattennivån, utan dammutsläpp. I den tredje månaden är sannolikheten 1/2 för att den naturliga vattenhöjningen blir 150mm, och med sannolikheten 1/4 vardera är den naturliga höjningen av nivån 50mm, respektive 350mm.

Om vattnet under någon av månaderna stiger för högt beräknas kostnaderna för skador till $\$10,000$ per mm över högvattennivån. En för låg vattennivå innebär att man måste pumpa upp vatten till höga kostnader; dessa kostnader är $5000 per mm som vi måste höja vattenståndet för att nå upp till 400mm under högvattennivån. För var och en av månaderna antas att beslut om utsläpp av vatten fattas *innan* den naturliga vatten höjningen (-sänkningen) har observerats (i verkligheten kan man naturligtvis justera utsläppen oftare än en gång per månad men för att erhålla en överskådlig och beräkningsbar modell görs denna begränsning).

Man vill minimiera de totala förväntade kostnaderna alternativt minimera sannolikheten för att bryta mot högsta och/eller lägsta tillåtna vattennivå (den senare modellen ger upphov till en speciell typ av "chance constraints".) Modellera båda målfunktionerna. Lös endast den första numeriskt.

4. [Planering av skogsavverkning]

Skogsbolaget skall besluta om hur man skall förvalta sitt skogsbestånd. Träden i beståndet är av varierande ålder, som indelas i klasserna 1 till 4. För närvarande är 8000 tunnland av klass 1, $10,000$ av klass 2, $20,000$ av klass 3 och $60,000$ av klass 4. Varje klass motsvarar ungefär 25 års tillväxt; klass 1 är den yngsta och klass 4 den äldsta skogen. Man vill bestämma hur mycket skog av de olika klasserna som skall avverkas under var och en av de fyra kommande 25-årsperioderna för att maximera den förväntade avkastningen av skogen. Man förutser också att företaget skall finnas kvar efter ett sekel, så man kräver att det finns minst $10,000$, $15,000$ respektive $40,000$ tunnland av klass 2, 3 respektive 4 vid slutet av planeringshorisonten.

Olika timmerklasser ger olika avkastning vid avverkning. Klass 1 ger ingen avkastning, klass 2 ger 250 kubikfot per tunnland, klass 3 ger 510 kubikfot per tunnland och klass 4 ger 700 kubikfot per tunnland. Om inga skogsbränder inträffar är antalet tunnland av klass i (för $i = 2, 3$) i en period lika med antalet tunnland av klass $i-1$ i föregående period minus avverkad areal av klass $i-1$ under föregående period. Klass 1 i period t består av total avverkad areal i period $t-1$ (man planterar alltså nya träd inom några få år efter varje avverkning), medan klass 4 inkluderar den areal som var i klass 3 och 4 under period $t-1$ minus avverkad areal av klass 3 och 4 i period $t-1$.

Medan vädereffekter inte varierar mycket över 25-årsperioder kan förluster på grund av skogsbränder vara synnerligen varierande. Antag att under varje 25-årsperiod blir, med sannolikheten 1/3 (2/3), 15% (5%) av det totala timmerbeståndet förstört. I varje 25-årsperiod antas att man först fattar beslut om och avverkar skog, sedan inträffar eventuella skogsbränder. (Detta är en mycket grov förenkling eftersom man i verkligheten naturligtvis beslutar om avverkning betydligt mera ofta än så.) Antag att diskonteringsnivåerna överbryggas fullständigt av ökande värde på timret, så att all avverkning under 100-årsperioden har samma nuvärde. Vinsten är då proportionell mot den totala avkastningen av skogen.

5. [Schemaläggning för sjuksköterskor]

Vid akutintaget på ett sjukhus skall man planera bemanningen under en lördag, en söndag och en måndag. En sjuksköterska kan arbeta ordinarie tid vilka två av dagarna som helst till en kostnad av \$300 per dag. I regel kan en sköterska ta hand om 10 patienter under ett skift (d.v.s. en dag). Efterfrågan av vård är emellertid inte känd i förväg. Om det kommer in fler patienter än vad ordinarie sjuksköterskor kan ta hand om måste de arbeta övertid, till en kostnad av \$50 per ytterligare patient som tas om hand. Efterfrågan av sköterskor under lördagen är också en bra indikator för efterfrågan under påföljande söndag och måndag. Fler sköterskor kan kallas in för söndags- och måndagstjänstgöring efter det att lördagens efterfrågan har observerats, var och en av dessa arbetar antingen både söndag och måndag eller inte alls. Kostnaden per dag för extra sköterskor är dock \$400. Sjukhuset vill minimera den förväntade kostnaden för att tillgodose efterfrågan av sjuksköterskor.

Antag att följande scenarier för de tre dagarnas efterfrågan alla inträffar med samma sannolikhet:

Scenario	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Lördag	100	100	100	90	90	90	80	80	80
Söndag	90	110	100	100	80	90	90	70	80
Måndag	120	120	110	110	110	100	100	100	90