## Markowitz

Klassisk portföljoptimering.

Antag att vi har $n$ tillgångar i vilka vi kan investera.

dessa har (slumpmässig) avkastning $r_i$ med medelvärden $\mathsf{E}[r_i] = \bar{r}_i$. Kovarianserna ges av $\sigma_{ij} = \mathsf{E}[(r_i - \bar{r}_i)(r_j - \bar{r}_j)]$.

Problemet är nu att minimera variansen vid en viss förväntad avkastning.

Variansen kommer att ges av

$$x^{\mathrm{T}} \Sigma x$$



## Markowitz

Formulerar vi detta matematiskt får vi

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j = \frac{1}{2} x^{\mathrm{T}} \Sigma x \\ \text{då} \quad & \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{r}_i = s \\ & \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \end{aligned}$$



Vi kan Lagrangerelaxera och få

$$L(x, \lambda, \mu) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j - \lambda\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i \bar{r}_i - s\Big) - \mu\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i - 1\Big)$$

tar vi gradienten av detta får vi

$$\frac{\partial L}{x_i} = \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_j - \lambda \bar{r}_i - \mu$$

För att lösa problemet får vi alltså lösa ekvationssystemet

$$\begin{bmatrix} \Sigma & \bar{r} & \bar{1} \\ \bar{r}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ \bar{1}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ s \\ 1 \end{bmatrix}$$



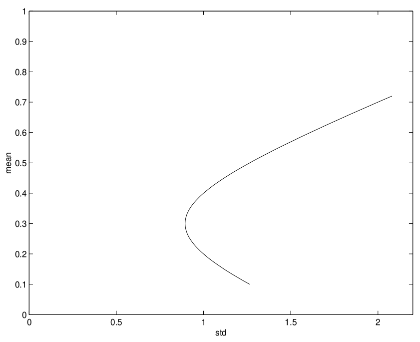
## Markowitz, omformulering1

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{r}_i \\ \text{då} \quad & \sum_{i} x_i = 1 \end{aligned}$$

Till detta problem finns det något $s$ så att vi löser samma problem som tidigare.

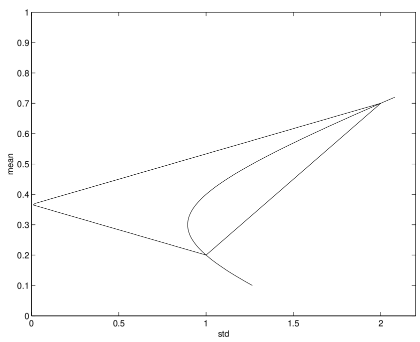


Detta ger oss en punkt på den effektiva fronten.






Perfekt korrelation






## Tvåfondsteoremet

Varje punkt på den effektiva fronten kan uttryckas som en kombination av två fonder.

Antag att vi har två fonder $x_1, x_2$ svarande mot förväntade avkastningar $s_1, s_2$ med tillhörande dualvariabler $\lambda_1, \lambda_2$ och $\mu_1 = \mu_2$. Vi bildar nu en konvexkombination

$$\hat{x} = \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2 \tag{1}$$
$$\hat{\lambda} = \alpha \lambda_1 + (1-\alpha) \lambda_2 \tag{2}$$
$$\hat{\mu} = \alpha \mu_1 + (1-\alpha) \mu_2 \tag{3}$$



Vi får

$$\begin{bmatrix} \Sigma & \bar{r} & \bar{1} \\ \bar{r}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ \bar{1}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{\lambda} \\ \hat{\mu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{s} \\ 1 \end{bmatrix}$$

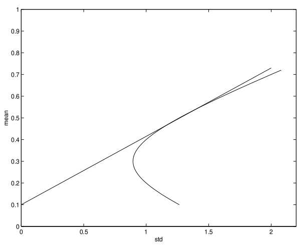
med

$$\hat{s} = \alpha s_1 + (1-\alpha) s_2$$

d.v.s en ny fond på den effektiva fronten. Därmed kan vi uttrycka varje punkt på de effektiva fronten som en kombination av endast två fonder.

## Enfondsteoremet

Antag att vi förutom våra riskfyllda tillgångar har en riskfri tillgång med avkastning ( och därmed förväntad avkastning) $r_f$.






## Enfondsteoremet

Vi kan skaffa bästa avkastning med hjälp av bara en fond och den riskfria avkastningen. Vi antar att:

- Alla har samma uppfattning om förväntad avkastning och kovarians.
- Alla kan låna till eller låna ut till den riskfira räntan.

Nu kommer samtliga aktörer att vilja äga samma fond. Därmed kommer denna fond att svara mot en liten flisa av samtliga förekommande riskfyllda tillgångsslag.



Tittar vi tillbaka på den riskfira avkastningen ser vi att om vi klarar av standardavvikelse $\sigma$ så får vi avkastningen

$$r = r_f + \frac{r_M - r_f}{\sigma_M}\sigma$$

med derivata

$$\frac{dr}{d\sigma} = \frac{r_M - r_f}{\sigma_M}$$



## Systematisk risk

Antag att vi har en markandsportfölj med standardavvikelse $\sigma_M$, förväntad avkastning $r_M$ samt att det existerar en annan okorrelerad tillgång med samma standardavvikelse och förväntad avkastning $r$. Om vi bildar den nya portföljen genom att vikta in den nya tillgången med en faktor $\alpha$ så får vi standardavvikelse

$$\sqrt{(1-\alpha)^2\sigma_M^2 + \alpha^2\sigma_M^2}$$

För små värden på $\alpha$ blir detta ungeför

$$\sigma = (1-\alpha)\sigma_M$$



## Systematisk risk

Den nya förväntade avkastningen blir

$$(1-\alpha)r_M + \alpha r$$

vilket är bättre än

$$(1-\alpha)r_M + \alpha r_f$$

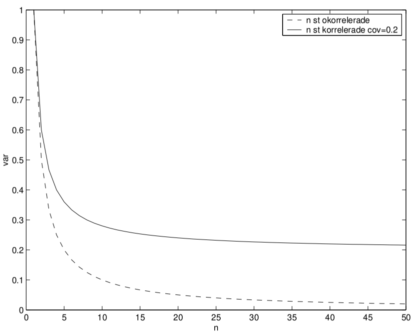
om vi har

$$r_f < r$$

Därför vill vi äga den okorrelerade tillgången om den ger bättre förväntad avkastning är riskfri ränta.



## Systematisk risk






## Capital asset pricing model

Om den nya tillgången har standardavvikelse $\sigma_i$ och kovarians $\sigma_{MI}$ så får vi i stället standardavvikelse

$$\sigma_\alpha = \sqrt{(1-\alpha)^2\sigma_M^2 + \alpha^2\sigma_i^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_{Mi}}$$

Deriverar vi detta m.a.p $\alpha$ så får vi

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha}|_{\alpha=0} = \frac{-\sigma_M^2 + \sigma_{Mi}}{\sigma_M}$$

och förväntad avkastning

$$(1-\alpha)r_M + \alpha r$$

med derivata

$$r - r_M$$



Vi får nu

$$\frac{dr}{d\sigma} = \frac{\frac{dr}{d\alpha}}{\frac{d\sigma}{d\alpha}} = \frac{r - r_M}{-\sigma_M^2 + \sigma_{Mi}}\sigma_M$$

För att vi skall har likhet måste vi ha

$$\frac{r - r_M}{-\sigma_M^2 + \sigma_{Mi}}\sigma_M = \frac{r_M - r_f}{\sigma_M}$$

Löser vi detta får vi

$$r = r_f + (r_M - r_f)\frac{\sigma_{Mi}}{\sigma_M^2}$$

Vi definierar

$$\beta = \frac{\sigma_{Mi}}{\sigma_M^2}$$

## Markowitz, nackdelar

- Saknar transaktionskostnader
- Saknar gränser på handel
- Bestraffar hög avkastning.
- Enbart 1-period.
- Enbart investerings-sidan av problemet.
- Tar enbart hänsyn till andra ordningens moment.



## Markowitz, omformulering2

$$\begin{aligned}
\min \quad & \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{r}_i \\
\text{då} \quad & x_i = x_i^0 + k_i - s_i, \quad \forall i \\
& \sum_i (1+\epsilon)k_i - (1-\epsilon)s_i = 0 \\
& l_i \leq x_i \geq u_i, \quad \forall i \qquad\qquad k_i, s_i \leq 0, \quad \forall i
\end{aligned}$$



## Exempel

- Vi skall spara till college
- Vi har två tillgångar att investera i .
- Vi har 55k vid start
- Vi behöver 80k vid slut.
- Vi har 3 perioder.
- Överskott tillgodoräknas, får vi underskott måste vi låna

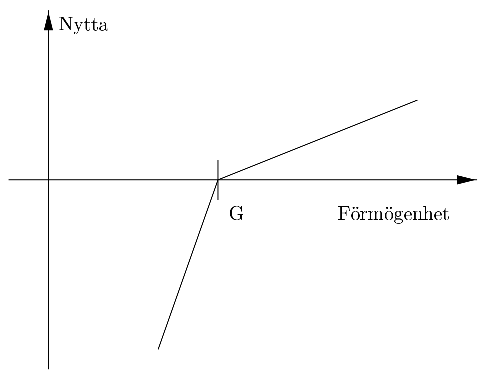


## Exempel

- Bra perioder tjänar vi 25% på aktier och 14% på obligationer
- Dåliga perioder tjänar vi 6% på aktier och 12% på obligationer
- Överskott ger oss en enhet nytta per $.
- Underskott ger oss -4 enheter nytta per $
- Målfunktionen är konvex.



## Nyttofunktion






## matematisk formulering

Hur formulera?

| | |
|---|---|
| $t = 0 \ldots T$ | Tidsperioder |
| $i \in I^t$ | Utfall |
| $p(i,t)$ | föräldern till ett visst utfall |
| $x_i^t$ | Mängd i aktier vi tid $t$ för utfall $i$ |
| $y_i^t$ | Mängd i obligationer för utfall $i$ vid tid $t$ |
| $u_i$ | Underskott för utfall $i$. |
| $w_i$ | Överskott för utfall $i$. |
| $\rho_i^t$ | Sannolikhet för utfall $i$ tid $t$ |
| $\nu_i^t$ | Utveckling av en investering i aktier från tid $t-1$ till $t$. |
| $\eta_i^t$ | Utveckling av en inv. i obligationer från $t-1$ till $t$. |



Vi skall maximera nyttofunktionen

$$\max \quad \sum_{i \in I^T} \rho_i^T (w_i - 4u_i) \tag{4}$$

Vi får inte investera mera pengar än vi har i början (Vi har bara ett utfall i början.

$$x_1^0 + y_1^0 = 55 \tag{5}$$

Vi får inte skapa eller förstöra några pengar

$$\nu_i^t x_{p(i,t)}^{t-1} + \eta_i^t y_{p(i,t)}^{t-1} = x_i^t + y_i^t, \forall t \in 1 \ldots T-1, \forall i \in I^t \tag{6}$$

I sista perioden skall vi betala ut ett straff eller få en vinst

$$\nu_i^T x_{p(i,t)}^{T-1} + \eta_i^T y_{p(i,t)}^{T-1} + u_i - w_i = 80, \quad \forall i \in I^T \tag{7}$$

$$x_i^t, y_i^t, u_i, w_i \geq 0 \tag{8}$$



## Lösningen

| Per. | Scen. | akt | obl |
|---|---|---|---|
| 1 | 1-8 | 41.5 | 13.5 |
| 2 | 1-4 | 65.1 | 2.17 |
| 2 | 5-8 | 36.7 | 22.4 |
| 3 | 1-2 | 83 | 0 |
| 3 | 3-4 | 0 | 71.4 |
| 3 | 5-6 | 0 | 71.4 |
| 3 | 7-8 | 64 | 0 |

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| +24.8 | +8.87 | +1.42 | 0 | +1.42 | 0 | 0 | -12.2 |

## Lösningen om vi bestämmer oss från början

| Per. | Scen. | akt | obl |
|---|---|---|---|
| 1 | 1-8 | 0 | 55 |
| 2 | 1-4 | 0 | 62.7 |
| 2 | 5-8 | 0 | 61.6 |
| 3 | 1-2 | 0 | 71.5 |
| 3 | 3-4 | 0 | 70.2 |
| 3 | 5-6 | 0 | 70.2 |
| 3 | 7-8 | 0 | 69.0 |

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| +1.48 | +0.05 | +0.05 | -1.35 | +0.05 | -1.35 | -1.35 | -2.72 |



## Yasuda-Kasai

- japanskt försäkringsbolag.
- Avreglering gör att folk börjar spara i försäkringar
- Flera olika typer av försäkringar finns i samma bolag, däremot har vi bivillkor vilka täcker flera typer
- Både Tillgångar och skulder varierar med ekonomiska variabler.



## konto

- Kontona kombinerar sparande och försäkring (Brand)
- När en kund öppnar konto/tar en försäkring deponeras en summa pengar
- Varje år får kunden ut en ränta
- Räntan består av fast avtal + bonus.
- När löptiden går ut återbetalas ca 90% av beloppet + ränta



## bivillkor

- Vi får Cash-flow constraints, d.v.s vi måste ha kontanter att betala ut till kunderna
- Vi har reservkrav, D.V.S vi måste äga en viss mängd pengar i förhållande till skulderna
- Vi har krav på hur pengar får investeras, både på försäkringstypsnivå och bolagsnivå
- Endast ränteinkomster och aktieutdelning får användas till bonusräntor



## Målfunktion

- Vi vill göra vinst åt bolaget
- Vi vill straffa brott mot reservkraven.
- Vi straffar även nästan brott mot reservkraven



## Övrigt

- Kapitalinkomster kan förvandlas till ränteinkomster via speciella fonder eller dotterbolag



## scenariogenerering

Olika modeller, Dels en slumpmässig, där utfall dras ur en fördelning, dels en där användaren ger utfall

- Vi kan antingen dra utfall ur den givna modellen
- eller kondensera de handkonstruerade utfallen

Kondenseringen bevarar medelvärde och varians, dock ej kovarians.



## Gjensidige Liv

Påminner om Yasuda-kasai, skillnader

- Saknar bolagsövergripande krav
- Har krav på minsta avkastning
- Har inga restriktioner på bonusränta

33

## Gjensidige Liv

Likheter

- Återigen tillgångar och skyldigheter kopplade
- Åter modelleras shortfall med ökande straff

34

## scenariogenerering

- Viktigt!! (Söppel inn söppel ut)
- Vi försöker fånga någons uppfattning om sannolikhetsfördelningen
- Vi måste fånga relevanta karakteristika hos fördelningen

35

## Metoder

Vi kan bygga trädet för hand.

+ Användaren får precis det användaren vill ha
+ Lättbegripligt.
- Jobbigt
- Dålig repeterbarhet

Vi kan bygga en modell av ekonomin (tidsseriemodell) och slumpa från denna

+ Bra repeterbarhet-> vi kan göra många experiment
+ Kan baseras på historiska data
- Mindre begriplig
- Sampling ger dålig representation av modellen

36

## Variance reduction

Vi har en variabel som är fördelad $N(0,1)$ Antag att vi samplar denna variabel och får utfallet $x$. Då är $-x$ ett lika troligt utfall. Tar vi med båda minskar vi felet i uppskattningarna.

Antag att vi har en process som ser ut som

$$\frac{dS}{S} = (1-S)dt + \sigma dz$$

där dz är en brownsk rörelse. Vi diskretiserar och får

$$\frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{S(t)} = (1 - S(t))\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}N(0,1)$$

37

## Variance reduction

Vi försöker skatta medelvärdet av $S$ efter 50 tidssteg, $S(0)+1$, $\sigma = 1$, $\Delta t = 0.01$. Vi tar 100 sampel med oberoende drivande processer, och 50*2 sampel med "spegelvända" processer. Vi gör detta 100 gånger och tittar på medelvärde och varians hos skattningarna.

| Metod | Medel | Std (medel) | Std (std) |
|---|---|---|---|
| Vanlig | 0.9182 | 0.0491 | 0.0534 |
| "Variance reduction" | 0.9219 | 0.0237 | 0.0633 |

D.v.s standardavvikelsen för skattningen av medlet blir hälften så stor. Däremot ökar felet i skattningen av standardavvikelsen. OBS andvänd inte detta om medlet är känt.

38

## Anpassning

Vi kan även sampla med anpassning. Om vi känner det sanna medelvärdet kan vi translatera vår sampling av sampel så att allt stämmer.

På samma sätt kan vi justera även standardavvikelsen för att få ett korrekt värde.

39

## Moment matchning

Vi kan även konstruera ett antal sampel med hjälp av optimering. Om vi skall ha två slumpmässiga variabler, och vill få de första N momenten korrekta, och korrekt kovarians, kan vi ställa upp ett optimeringsproblem och minimera avståndet mellan samplets egenskaper, och de egenskaper vi vill ha.

+ Vi får bra träd.
+ Kan klara även överbestämda scenariogenerreringsproblem.
+ Kan prioritera olika egenskaper.
- Tar lång tid (kan ta mer tid än att lösa problemet.
- Problem om egenskaperna är underbestämda.

40

## Moment matchning, exempel

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{p,x,y} & (\mu_x - \bar{\mu}_x)^2 + (\mu_y - \bar{\mu}_y)^2 \\ & +(\sigma_x - \bar{\sigma}_x)^2 + (\sigma_x - \bar{\sigma}_x)^2 + (\sigma_{xy} - \bar{\sigma}_{xy})^2 \\ \text{Då.} & \mu_x = \sum_{i=1}^n p_i x_i \\ & \mu_y = \sum_{i=1}^n p_i y_i \\ & \sigma_x = \sqrt{\sum_{i=1}^n p_i (x_i - \mu_x)^2} \\ & \sigma_y = \sqrt{\sum_{i=1}^n p_i (y_i - \mu_y)^2} \\ & \sigma_{xy} = \sum_{i=1}^n p_i (y_i - \mu_y)(x_i - \mu_x) \\ & \sum_{i=1}^n p_i = 1 \\ & p >= 0 \end{array}$$

## Heuristik för anpassning

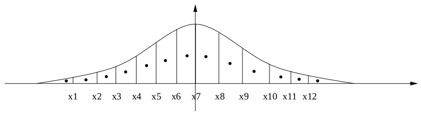
Finns även metoder som anpassar sampel till att få korrekta moment 1-4, samt korrekt kovarians, utan optimering. dessa kan inte användas för överbestämda problem, men fungerar bättre för underbestämda.

A heuristic for moment-matching scenario generation
Høyland, Kaut och Wallace, Computational Optimization and Applications 2003, vol. 24, sid 169–185



## Konstruktion

Vi kan även konstruera en representation.






## Konstruktion

Här väljer vi

$$p_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f_\xi(t)dt = \int_{\Omega : x_n \le \xi(\omega) \le x_{n+1}} dP(\omega)$$

$$\xi_n = \frac{1}{p_n}\int_{x_n}^{x_{n+1}} t f_\xi(t)dt = \frac{1}{p_n}\int_{\Omega : x_n \le \xi(\omega) \le x_{n+1}} \xi(\omega)dP(\omega)$$

d.v.s medel för intervallet och sannolikhet för intervallet.

Notera att detta kan användas även för sampling.



## Exempel

betrakta problemet

$$\min_\alpha \mathsf{E}[\log((1-\alpha)+\alpha\xi)]$$

samt antag att $\xi$ har fördelningen $\exp(N(0.02, 0.2))$, d.v.s log-normalfördelad.

Vi tar 50 sampel av $\xi$ och löser för vanlig sampling, antitetisk sampling och sampling med anpassning

| Metod | medel $\alpha$ | Std $\alpha$ | medel obj | std obj |
|---|---|---|---|---|
| Sampling | 0.908 | 0.576 | 0.0238 | 0.0259 |
| Var. red. | 1.0459 | 0.1736 | 0.0204 | 0.0011 |
| anpassning | 1.000 | 0.0754 | 0.0199 | 0.0010 |



## Exempel

Vi beräknar nu målfunktion “out of sample”, d.v.s tag andra värden på $\xi$, 1,000,000 sampel.

| Metod | medel obj | std obj |
|---|---|---|
| Sampling | 0.0126 | 0.00748 |
| Var. red. | 0.01918 | 0.00267 |
| anpassning | 0.01979 | 5.225e-4 |