Optimering under osäkerhet

Föreläsning 2, lp1 2003

Ann-Brith Strömberg

5 september 2003

Ett exempel från spannmålsodling

- På 500 tunnland skall odlas vete, majs och sockerbetor.
- Kostnad för sådd ($/tunnland): vete: 150, majs: 230, betor: 260
- Eget behov av skörd (ton): vete: 200, majs: 240
- Avkastning (ton/tunnland) vete:$\mathbf{a}_1$, majs:$\mathbf{a}_2$, betor:$\mathbf{a}_3$ (OSÄKER)
- Inköpskostnad ($/ton): vete: 238, majs: 210
- Försäljningspris ($/ton) vete: 170, majs: 150, betor: 36 / 10
- Maximalt 6000 ton betor får säljas till det högre priset

Variabler

x_j : antal tunnland som besås med gröda j

(1: vete, 2: majs, 3: sockerbetor)

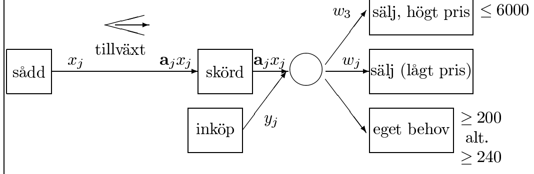
y_j : antal ton av gröda $j = 1,2$ som köps in för eget behov

w_j : antal ton av skörden av gröda $j = 1,2,3,4$ som säljs

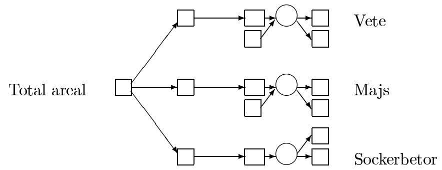
(3: sockerbetor, högt pris)

(4: sockerbetor, lågt pris)

Flödesschema för en gröda



Flödesschema för alla grödorna



Optimeringsmodell (minimera kostnader)

Antag att avkastningen är den förväntade, $a = (2.5, 3, 20)$

$$
\begin{array}{llcll}
z^* = \min & 150x_1 + 230x_2 + 260x_3 & & & \text{sådd} \\
& +238y_1 + 210y_2 & & & \text{köp} \\
& -170w_1 - 150w_2 - 36w_3 - 10w_4 & & & \text{sälj} \\
\\
\text{då} & x_1 + x_2 + x_3 & \leq & 500 & \text{tunnland} \\
& 2.5 \cdot x_1 + y_1 - w_1 & \geq & 200 & \text{min.behov vete} \\
& 3 \cdot x_2 + y_2 - w_2 & \geq & 240 & \text{min.behov majs} \\
& 20 \cdot x_3 - w_3 - w_4 & \geq & 0 & \text{sälj sockerbetor} \\
& w_3 & \leq & 6000 & \text{max kvot betor} \\
& x_j, y_j, w_j & \geq & 0, \quad \forall j &
\end{array}
$$

Optimallösning vid förväntad avkastning

Om avkastningen **antas vara och blir** som förväntat fås lösningen:

$$
x^{\text{ex}} = \begin{pmatrix} 120 \\ 80 \\ 300 \end{pmatrix} \quad y^{\text{ex}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad w^{\text{ex}} = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 6000 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Årets vinst $= -z^{\text{ex}} = \$\ 118\ 600$

Antag: Varje år perfekt information om årets avkastning $\Rightarrow$ Deterministisk modell

Antagande och utfall: avkastning 20% under/över väntevärdena

$a^{\text{lo}} = (2, 2.4, 16)$ och $a^{\text{hi}} = (3, 3.6, 24) \Rightarrow$ Optimallösningar:

$$
x^{\text{lo}} = \begin{pmatrix} 100 \\ 25 \\ 375 \end{pmatrix} \quad y^{\text{lo}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 180 \end{pmatrix} \quad w^{\text{lo}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6000 \\ 0 \end{pmatrix} \quad -z^{\text{lo}} = \$\ 59\ 950
$$

$$
x^{\text{hi}} = \begin{pmatrix} 183.33 \\ 66.67 \\ 250 \end{pmatrix} \quad y^{\text{hi}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad w^{\text{hi}} = \begin{pmatrix} 350 \\ 0 \\ 6000 \\ 0 \end{pmatrix} \quad -z^{\text{hi}} = \$\ 167\ 667
$$

8

Steg ett-beslut—före sådd

Gissa avkastningen (dålig/förväntad/bra) $\Rightarrow$ x-lösning.

Steg två-beslut—efter skörd

Observera avkastningen och bestäm vad som skall säljas och/eller köpas in $\Rightarrow$ (y, w)-lösning.

Vinst, $		Observerad avkastning			
		-20%	förväntad	+20%	Medelv.
Gissad avkastning	-20%	59 950	86 600	113 250	86 600
	förväntad	55 120	118 600	148 000	107 240
	+20%	47 700	107 682	167 667	107 683

9

Vinst vid olika gissningar och avkastningar

10

Antag att 3 olika scenarier kan inträffa

Alla med sannolikhet $\frac{1}{3}$

x_j = antal tunnland som besås med gröda j

SEDAN GÅR TIDEN ETT TAG

OCH NÅGOT SCENARIO INTRÄFFAR

y_{js} = antal ton av gröda j som köps in vid scenario s

w_{js} = antal ton av gröda j som säljs vid scenario s

Scenario 1: 20% lägre avkastning: $a_{\cdot 1} = (2, 2.4, 16)$

Scenario 2: förväntad avkastning: $a_{\cdot 2} = (2.5, 3, 20)$

Scenario 3: 20% högre avkastning: $a_{\cdot 3} = (3, 3.6, 24)$

11

Scenario-modell

$$\begin{array}{lrcll}
\min & \multicolumn{4}{l}{150x_1 + 230x_2 + 260x_3} \\
& \multicolumn{4}{l}{+\frac{1}{3}\sum_{s=1}^{3}(238y_{1s} + 210y_{2s}} \\
& \multicolumn{4}{l}{\qquad -170w_{1s} - 150w_{2s} - 36w_{3s} - 10w_{4s})} \\
\text{då} & x_1 + x_2 + x_3 & \leq & 500 & \\
& a_{1s}x_1 + y_{1s} - w_{1s} & \geq & 200 & s = 1,2,3 \\
& a_{2s}x_2 + y_{2s} - w_{2s} & \geq & 240 & s = 1,2,3 \\
& a_{3s}x_3 - w_{3s} - w_{4s} & \geq & 0 & s = 1,2,3 \\
& w_{3s} & \leq & 6000 & s = 1,2,3 \\
& x_j, y_{js}, w_{js} & \geq & 0 & \forall j, s
\end{array}$$

12

Optimallösning vid 3 olika scenarier

$$x^* = \begin{pmatrix} 170 \\ 80 \\ 250 \end{pmatrix} \quad y^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 48 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad w^* = \begin{pmatrix} 140 & 225 & 310 \\ 0 & 0 & 48 \\ 4000 & 5000 & 6000 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$s = 1$ (låg avkastning) $\Rightarrow$ $-z_1^* = \$\ 48\,820$

$s = 2$ (förväntad avkastning) $\Rightarrow$ $-z_2^* = \$\ 109\,350$

$s = 3$ (hög avkastning) $\Rightarrow$ $-z_3^* = \$\ 167\,000$

Medelvärde under många år: $-z^* = \$\ 108\,390$

13

Vad är det värt att få titta i kristallkulan?