Optimering under osäkerhet

Föreläsning 4, lp1 2003

Ann-Brith Strömberg

5 september 2003

Ett fiskeriexempel

- Ett antal fiskegrund—framtida fångster (= kvoter) okända
- Potentiella fiskförädlingsfabriker—byggkostn. ⇔ storlek
- Framtida transportkostnader/kapaciteter—kända (antas linjära)
- Parametrar: f_{ik} = kostnad att bygga fabrik på plats i med kapacitet b_k
  c_{ij} = transportkostnad per enhet från grund j till fabrik i
  a_{ij} = transportkapacitet från grund j till fabrik i
  $d_j(\xi)$ = maximal fångstkvot för grund j vid scenario $\xi \in \Xi$
- Variabler: y_{ij} = transporterad volym per tidsenhet från grund j till fabrik i
  $$x_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{om fabrik byggs på plats } i\text{, med kapacitet } b_k, \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Om vi vet att scenario ξ alltid inträffar

$$\begin{array}{llcll}
\min\limits_{x,y} & \sum\limits_{k\in\mathcal{K}}\sum\limits_{i\in\mathcal{I}} f_{ik}x_{ik} & + & \sum\limits_{i\in\mathcal{I}}\sum\limits_{j\in\mathcal{J}} c_{ij}y_{ij} & \\
\text{då} & \sum\limits_{j\in\mathcal{J}} y_{ij} & \le & \sum\limits_{k\in\mathcal{K}} b_k x_{ik}, & i\in\mathcal{I} \\
& \sum\limits_{k\in\mathcal{K}} x_{ik} & \le & 1, & i\in\mathcal{I} \\
& \sum\limits_{i\in\mathcal{I}} y_{ij} & = & d_j(\xi), & j\in\mathcal{J} \\
& 0 \le y_{ij} & \le & a_{ij}, & i\in\mathcal{I},\ j\in\mathcal{J} \\
& x_{ik} & \in & \{0,1\}, & i\in\mathcal{I},\ k\in\mathcal{K}
\end{array}$$

Om scenario ξ^ℓ inträffar med sannolikhet p^ℓ

$$\begin{array}{llcll}
\min\limits_{x;y^\ell,\ell\in\mathcal{L}} & \sum\limits_{k\in\mathcal{K}}\sum\limits_{i\in\mathcal{I}} f_{ik}x_{ik} & + & \sum\limits_{\ell\in\mathcal{L}} p^\ell \sum\limits_{i\in\mathcal{I}}\sum\limits_{j\in\mathcal{J}} c_{ij}y^\ell_{ij} & \\
\text{då} & \sum\limits_{j\in\mathcal{J}} y^\ell_{ij} & \le & \sum\limits_{k\in\mathcal{K}} b_k x_{ik}, & i\in\mathcal{I},\ \ell\in\mathcal{L} \\
& \sum\limits_{k\in\mathcal{K}} x_{ik} & \le & 1, & i\in\mathcal{I} \\
& \sum\limits_{i\in\mathcal{I}} y^\ell_{ij} & = & d_j(\xi^\ell), & j\in\mathcal{J},\ \ell\in\mathcal{L} \\
& 0 \le y^\ell_{ij} & \le & a_{ij}, & i\in\mathcal{I},\ j\in\mathcal{J},\ \ell\in\mathcal{L} \\
& x_{ik} & \in & \{0,1\}, & i\in\mathcal{I},\ k\in\mathcal{K}
\end{array}$$

En recourse-modell (kursändring, justering)

Antag att scenario ξ^ℓ inträffar med sannolikhet p^ℓ, $\ell \in \mathcal{L}$

Utfallsrummet: $\Xi = \bigcup_{\ell\in\mathcal{L}} \xi^\ell$, $\sum_{\ell\in\mathcal{L}} p^\ell = 1$

Förväntad framtida transportkostnad (recourse) som funktion av x:

$$\mathcal{Q}(x) = \sum_{\ell\in\mathcal{L}} p^\ell Q(x,\xi^\ell)$$

Bästa transportlösning då $x = \bar{x}$, om scenario ξ^ℓ inträffar:

$$\forall \ell \in \mathcal{L}: \quad Q(\bar{x},\xi^\ell) = \min_{y^\ell} \sum_{i\in\mathcal{I}}\sum_{j\in\mathcal{J}} c_{ij} y_{ij}^\ell$$

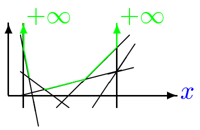
$$\begin{array}{lrcll} \text{då} & \sum_{j\in\mathcal{J}} y_{ij}^\ell & \leq & \sum_{k\in\mathcal{K}} b_k \bar{x}_{ik}, & i \in \mathcal{I} \\ & \sum_{i\in\mathcal{I}} y_{ij}^\ell & = & d_j(\xi^\ell), & j \in \mathcal{J} \\ & 0 \leq y_{ij}^\ell & \leq & a_{ij}, & i \in \mathcal{I},\ j \in \mathcal{J} \end{array}$$

Minimera förväntad totalkostnad under många år

$$\begin{array}{llcll} \min_x & \sum_{k\in\mathcal{K}}\sum_{i\in\mathcal{I}} f_{ik} x_{ik} & + & \mathcal{Q}(x) & \\ \text{då} & \sum_{k\in\mathcal{K}} x_{ik} & \leq & 1, & i \in \mathcal{I} \\ & x_{ik} & \in & \{0,1\}, & i \in \mathcal{I},\ k \in \mathcal{K} \end{array}$$

- Om $x = \bar{x} = 0$ så finns inga tillåtna transportlösningar
  Lägg t.ex. till bivillkoret $\sum_{i\in\mathcal{I}}\sum_{k\in\mathcal{K}} x_{ik} \geq 1$
- Funktionerna $Q(x,\xi)$, $\xi \in \Xi$, är styckvis linjära och konvexa i x

Exempel: $Q(x,\xi)$



Lösningsmetod

- Jordbruksproblemet är litet (3 scenarier ger totalt 21 variabler) $\Rightarrow$ lös med alla variabler "i ett steg"
- Antag 100 fiskegrund, 30 potentiella fabriker med 5 kapacitetsnivåer vardera samt 30 scenarier

$\Rightarrow$ 150 binära variabler (x) ($\leq 6^{30} \approx 10^{23}$ möjliga kombinationer)

$\Rightarrow$ 90 000 kontinuerliga variabler (y) (separerar delvis)

- Stora problem går ej att lösa med direkta metoder
- Dekomponera problemet i "hanterliga" delar
- "L-shaped decomposition" = Benders dekomposition = dual dekomposition

Exempel

$$\begin{array}{llllllll} \min & 2x & +\frac{1}{2}\overbrace{(4y_1+2y_2)}^{\ell=1} & & +\frac{1}{2}\overbrace{(6y_3+4y_4)}^{\ell=2} & & & \\ \text{då} & x & & & & & \leq & 7 \\ & 2x & +y_1 & -y_2 & & & = & 5 \\ & x & & & +y_3 & -y_4 & = & 4 \\ & x & y_1, & y_2, & y_3, & y_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Recourse-formulering: $\min \; 2x + \mathcal{Q}(x)$ då $0 \leq x \leq 7$

$$\mathcal{Q}(x) = \min_y \left\{ 2y_1 + y_2 + 3y_3 + 2y_4 \;\middle|\; \begin{array}{rcl} y_1 - y_2 & = & 5 - 2x \\ y_3 - y_4 & = & 4 - x \\ y_1, y_2, y_3, y_4 & \geq & 0 \end{array} \right\}$$

8

Separerar

$$\mathcal{Q}(x) = \overbrace{\begin{bmatrix} \min & 2y_1 + y_2 \\ \text{då} & y_1 - y_2 = 5 - 2x \\ & y_1, y_2 \ge 0 \end{bmatrix}}^{\ell=1} + \overbrace{\begin{bmatrix} \min & 3y_3 + 2y_4 \\ \text{då} & y_3 - y_4 = 4 - x \\ & y_3, y_4 \ge 0 \end{bmatrix}}^{\ell=2}$$

/LP-dual/

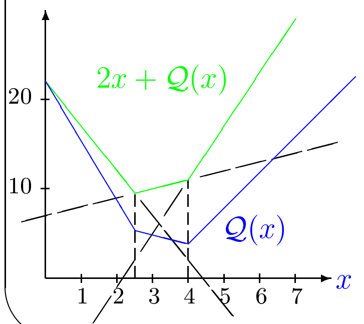
$$= \begin{bmatrix} \max & (5-2x)u_1 \\ \text{då} & u_1 \le 2 \\ & -u_1 \le 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \max & (4-x)u_2 \\ \text{då} & u_2 \le 3 \\ & -u_2 \le 2 \end{bmatrix}$$

$$= \max\{(5-2x)\cdot 2; (5-2x)\cdot(-1)\}$$
$$+ \max\{(4-x)\cdot 3; (4-x)\cdot(-2))\}$$
$$= \max\{10-4x; -5+2x\} + \max\{12-3x; -8+2x\}$$

9

Brytpunkter vid $x = \frac{5}{2}$ och $x = 4$

$$\mathcal{Q}(x) = \begin{cases} 22 - 7x & \text{då} \quad x \le \frac{5}{2} \\ 7 - x & \text{då} \quad \frac{5}{2} \le x \le 4 \\ -13 + 4x & \text{då} \quad 4 \le x \end{cases}$$



$$\begin{array}{ll} \min & 2x + \mathcal{Q}(x) \\ \text{då} & 0 \le x \le 7 \end{array}$$

$\Rightarrow x^* = \frac{5}{2}$

10

L-shaped decomposition—generellt

- Antag att q, T och h är stokastiska variabler med diskret (approximerad) sannolikhetsfördelning. $(\xi = (q, T, h))$
- $P([q,T,h] = [q^\ell, T^\ell, h^\ell]) = p^\ell, \qquad \sum_{\ell\in\mathcal{L}} p^\ell = 1$

$$\begin{array}{lllll} \min & c^T x & + \sum_{\ell\in\mathcal{L}} p^\ell (q^\ell)^T y^\ell & & \\ \text{då} & Ax & & = & b \\ & T^\ell x & + \quad W y^\ell & = & h^\ell, \quad \ell \in \mathcal{L} \\ & x & & \in & X \\ & & y^\ell & \ge & 0, \quad \ell \in \mathcal{L} \end{array}$$

- Bivillkor: $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ T^1 & W & 0 & \cdots & 0 \\ T^2 & 0 & W & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T^L & 0 & 0 & \cdots & W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ h^1 \\ h^2 \\ \vdots \\ h^L \end{pmatrix}$

11

Förväntad recourse

$$\begin{array}{llll} \mathcal{Q}(\overline{x}) = \min & \sum_{\ell\in\mathcal{L}} p^\ell (q^\ell)^T y^\ell & & \\ \text{då} & W y^\ell & = & h^\ell - T^\ell \overline{x}, \quad \ell \in \mathcal{L} \\ & y^\ell & \ge & 0, \qquad \ell \in \mathcal{L} \end{array}$$

Separerar i ett (mindre) problem för varje scenario $\ell \in \mathcal{L}$:

$$\mathcal{Q}(\overline{x}) = \sum_{\ell\in\mathcal{L}} p^\ell \cdot \begin{bmatrix} \min & (q^\ell)^T y^\ell & & \\ \text{då} & W y^\ell & = & h^\ell - T^\ell \overline{x} \\ & y^\ell & \ge & 0 \end{bmatrix}$$

12

Recourse-modell

$$\begin{array}{rrcl} \min_x & c^T x & + & \mathcal{Q}(x) \\ \text{då} & Ax & = & b \\ & x & \in & X \end{array} \qquad \mathcal{Q}(x) = \sum_{\ell \in \mathcal{L}} p^\ell Q(x, \xi^\ell)$$

Tillåtna x-lösningar: $\{x \in X \mid Ax = b,\ \mathcal{Q}(x) < \infty\}$

LP-dualitet: (antag att dualen har tillåtna lösningar, $\ell \in \mathcal{L}$)

$$Q(x,\xi^\ell) = \left[\begin{array}{ll} \min_y & (q^\ell)^T y \\ \text{då} & Wy = h^\ell - T^\ell x \\ & y \geq 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ll} \max_u & (h^\ell - T^\ell x)^T u \\ \text{då} & W^T u \leq q^\ell \end{array}\right]$$

om: OTILLÅTEN $\Leftrightarrow$ OBEGRÄNSAD

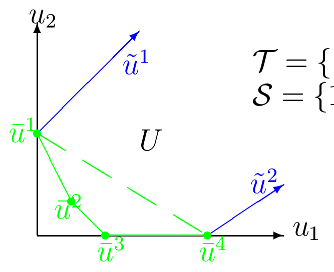
$$\Downarrow$$

$$\mathcal{Q}(x) = \infty$$

13

Studera polyedern $U = \{u \mid W^T u \leq q\}$

Extrempunkter: $\bar{u}^t$, $t \in \mathcal{T}$ Extremstrålar: $\tilde{u}^s$, $s \in \mathcal{S}$



$$\mathcal{T} = \{1,2,3,4\}$$
$$\mathcal{S} = \{1,2\}$$

$$U = \left\{ u = \sum_{t\in\mathcal{T}} \lambda_t \bar{u}^t + \sum_{s\in\mathcal{S}} \mu_s \tilde{u}^s \,\middle|\, \sum_{t\in\mathcal{T}} \lambda_t = 1; \lambda_t \geq 0, t \in \mathcal{T}; \mu_s \geq 0, s \in \mathcal{S} \right\}$$

14

Inre representation av det duala problemet

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{\lambda,\mu} & \sum_{t\in\mathcal{T}} (h - Tx)^T \bar{u}^t \lambda_t + \sum_{s\in\mathcal{S}} (h - Tx)^T \tilde{u}^s \mu_s \\ \text{då} & \sum_{t\in\mathcal{T}} \lambda_t = 1; \qquad \lambda_t \geq 0, \quad t \in \mathcal{T} \\ & \mu_s \geq 0, \qquad s \in \mathcal{S} \end{array}$$

- Om $(h - Tx)^T \tilde{u}^s \geq 0$ för någon extremstråle $s \in \mathcal{S}$ så är lösningen till dualen obegränsad ($\mu_s \to +\infty$) (om > 0 så målf.v. $\to +\infty$)

$\Rightarrow$ Primalen saknar tillåten lösning, d.v.s, mängden $\{y \geq 0 \mid Wy = h - Tx\}$ är tom

- Betyder att lösningen x är otillåten i ursprungsproblemet (t.ex. att bygga $x = 0$ fiskförädlingsfabriker)