Dekomposition

Vi betraktar ett problem som ser ut som

$$\begin{array}{lll} \min z(x) = & c^{\mathrm{T}}x & \\ \text{Då} & Ax & = b \\ & Dx & = d \\ & x & \geq 0 \end{array} \Bigg\} = X$$

Här antar vi att X är en begränsad mängd och att problemet

$$\begin{array}{rl} \min z(x) & = c^{\mathrm{T}}x \\ \text{Då} & x \in X \end{array}$$

är lätt att lösa av någon anledning.

Till exempel kan vi ha att $Dx = d$ ges av ett nätverksproblem, eller att problemet separerar då vi har

$$\begin{array}{rl} D_i x_i & = d_i \\ x_i & \geq 0 \end{array}$$

Vi Lagrangerelaxerar de svåra bivilkoren och får sub-problemet

$$\begin{array}{lll} \min\limits_{x} & z(x,\pi) = c^{\mathrm{T}}x - \pi^{\mathrm{T}}(Ax-b) & = \overbrace{(c^{\mathrm{T}} - \pi^{\mathrm{T}}A)}^{\bar{c}}x + \pi^{\mathrm{T}}b \\ \text{Då} & Dx = d & \\ & x \geq 0 & \end{array}$$

Löser vi detta får vi en hörnpunkt av X som vi kallar x^i.

Master-problem

Vi kan nu söka en lösning bland de hörnpunkter av X som vi hittils genererat. Masterproblemet blir därmed att lösa

$$\begin{array}{rl} \max\limits_{\lambda} z(\lambda) & = c^{\mathrm{T}}x(\lambda) \\ \text{Då} & Ax(\lambda) = b \end{array}$$

Vi bildar här $x(\lambda)$ som

$$\begin{array}{c} x(\lambda) = \sum_i \lambda_i x^i \\ \sum_i \lambda_i = 1 \\ \lambda_i \geq 0 \end{array}$$

d.v.s som en konvexkombination av de hittilsvarande punkterna.

Omformulerad master

Vi kan nu omformulera masterproblemet som att lösa

$$\begin{array}{lll} \max\limits_{\lambda} & c^{\mathrm{T}} \sum_i \lambda_i x^i = \sum_i \lambda_i (c^{\mathrm{T}} x^i) & \\ \text{Då} & A\sum_i \lambda_i x^i = \sum_i \lambda_i (Ax^i) & = b \quad (\pi) \\ & \sum_i \lambda_i & = 1 \quad (\gamma) \\ & \lambda_i \geq 0 & \end{array}$$

d.v.s ett problem enbart i lambda, vilket vi kan skriva som

$$\begin{array}{rll} \max\limits_{\lambda} & f^{\mathrm{T}}\lambda & \\ \text{Då} & E\lambda & = e \\ & \lambda & \geq 0 \end{array}$$

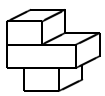
Lego international

- Vi har tillverkning i Europa och Japan.
- Japan tillverkar andra produkter med andra priser
- Vi har totalt 11 stora och 13 små bitar vilka skall fördelas mellan Europa och Japan.
- x_5, x_7 är tilldelninen av stora bitar till Europa och Japan, x_6, x_8 är tilldelningen av små bitar.

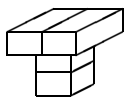
Problemet blir att maximera vinsten från dotterbolagen då

$$\begin{array}{rcl} x_5 + x_7 & \leq & 11 \\ x_6 + x_8 & \leq & 13 \\ x_i & \geq & 0 \quad \forall i = 5 \ldots 8 \end{array}$$

LEGO-Europa



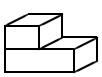
Stol, x_2 (1200:–)



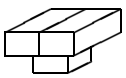
Bord, x_1 (1600:–)

$$\begin{array}{rrcrcrcrl} \max & z & = & 1600x_1 & + & 1200x_2 & & & \\ \text{s.t.} & & & 2x_1 & + & x_2 & = & x_5 & \text{(stora)} \\ & & & 2x_1 & + & 2x_2 & = & x_6 & \text{(små)} \\ & & & & & x_1,\ x_2 & \geq & 0 & \leq 10 \end{array}$$

LEGO-Japan



Stol, x_4 (800:–)



Bord, x_3 (1400:–)

$$\begin{array}{rrcrcrcrl} \max & z & = & 1400x_3 & + & 800x_4 & & & \\ \text{s.t.} & & & 2x_3 & + & x_4 & = & x_7 & \text{(stora)} \\ & & & x_3 & + & x_4 & = & x_8 & \text{(små)} \\ & & & & & x_3,\ x_4 & \geq & 0 & \leq 10 \end{array}$$

Totalt

$$\begin{array}{llllllll} \max & 16x_1 & +12x_2 & +14x_3 & +8x_4 & & & \\ \text{s.t.} & & & & & x_5 + x_6 & & \leq 11 \\ & & & & & & x_7 + x_8 & \leq 13 \\ & 2x_1 & +x_2 & & & -x_5 & & = 0 \\ & 2x_1 & +2x_2 & & & & -x_6 & = 0 \\ & & & 2x_3 & +x_4 & & -x_7 & = 0 \\ & & & x_3 & +x_4 & & & -x_8 = 0 \end{array}$$

Startlösning

Som startlösning tar vi noll-lösningen, d.v.s inga delar skickas och ingenting tillverkas. $x^1 = (0,0,0,0,0,0,0,0)$

Vi har $\hat{c}_1 = c^{\mathrm{T}}x^1 = 0$ P.S.S har vi $\hat{A}_1 = \begin{bmatrix} Ax^1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Vår masterproblem blir:

$$\begin{array}{rrrl} \max & z & = & 0 * \lambda_1 \\ \text{s.t.} & & 0\lambda_1 & \leq 11 \\ & & 0\lambda_1 & \leq 13 \\ & & \lambda_1 & = 1 \end{array}$$

med lösning $\lambda_1 = 1$ och dual lösning $y = (0,0,0)$.

Interna priser

Att dualvariablerna för de båda övre bivillkoren är 0 innebär att vi är beredda att betala 0 kronor för en extra bit. Det interna priset för bitar blir därför 0. Båda dotterbolagen kommer då att tillverka maximalt av alla varor då vi saknar tillverkningskostnad.

Den nya hörnpunkten blir nu $x^2 = (10,10,10,10,30,40,30,20)$

Vi har $\hat{c}^2 = c^{\mathrm{T}}x^2 = (1600,1200,1400,800,0,0,0,0)x^2 = 50000$

P.S.S har vi $\hat{A} = \begin{bmatrix} Ax^2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 60 \\ 1 \end{bmatrix}$

Vårt nya masterproblem blir.

$$\begin{array}{rrrl} \max & z & = & 50000\lambda_2 \\ \text{s.t.} & & 60\lambda_2 & \leq 11 \\ & & 60\lambda_2 & \leq 13 \\ & & \lambda_1 + \lambda_2 & = 1 \end{array}$$

Den optimala duallösningen blir

$$y = (833.3333, 0, 0)$$

d.v.s stora bitar kostar 833.33333 och små är fortfarande gratis.

Lego-Europa

Lego-Europa får problemet

$$\begin{array}{rrrcrcrcrl} \max & z & = & 1600x_1 & + & 1200x_2 & - & 833x_5 & \\ \text{s.t.} & & & 2x_1 & + & x_2 & = & x_5 & \text{(stora)} \\ & & & 2x_1 & + & 2x_2 & = & x_6 & \text{(små)} \\ & & & & & x_1,\ x_2 & \geq & 0 & \leq 10 \end{array}$$

vilket ger att vi skall producera 10 stolar och 0 bord

Lego-Japan

Lego-Japan får problemet

$$\begin{array}{rrrcrcrcrl} \max & z & = & 1400x_3 & + & 800x_4 & - & 833x_7 & \\ \text{s.t.} & & & 2x_3 & + & x_4 & = & x_7 & \text{(stora)} \\ & & & x_3 & + & x_4 & = & x_8 & \text{(små)} \\ & & & & & x_3,\ x_4 & \geq & 0 & \leq 10 \end{array}$$

vilket ger att vi skall producera 0 stolar och 0 bord

Den nya hörnpunkten blir nu x=(0,10,0,0,10,20,0,0)

Vårt nya masterproblem blir.

$$\begin{array}{rrrcrcrl} \max & z & = & 50000\lambda_2 & + & 12000\lambda_3 & & \\ \text{s.t.} & & & 60\lambda_2 & + & 10\lambda_3 & \leq & 11 \\ & & & 60\lambda_2 & + & 20\lambda_3 & \leq & 13 \\ & & & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & & = & 1 & \end{array}$$

med optimallösning $\lambda = (0.65, 0.15, 0.2)$ och dual lösning $(467, 367, 0)$

Lego-Europa

Lego-Europa får problemet

$$\begin{array}{rrrcrcrcrl} \max & z & = & 1600x_1 & + & 1200x_2 & - & 466.66x_5 & -366.66x_6 \\ \text{s.t.} & & & 2x_1 & + & x_2 & = & x_5 & \text{(stora)} \\ & & & 2x_1 & + & 2x_2 & = & x_6 & \text{(små)} \\ & & & & & x_1,\ x_2 & \geq & 0 & \leq 10 \end{array}$$

vilket ger att det finns ingen produktionsplan som ger vinst varför vi producerar 0 bord och 0 stolar.

Lego-Japan

Lego-Japan får problemet

$$\begin{array}{rrcrcrcrl} \max & z & = & 1400x_3 & + & 800x_4 & - & 466.66x_7 & -366.666x_8 \\ \text{s.t.} & & & 2x_3 & + & x_4 & = & x_7 & \text{(stora)} \\ & & & x_3 & + & x_4 & = & x_8 & \text{(små)} \\ & & & & & x_3,\ x_4 & \geq & 0 & \leq 10 \end{array}$$

vilket ger att vi skall producera 10 bord och inga stolar

Den nya hörnpunkten blir nu x=(0,0,10,0,0,0,20,10)

Vårt nya masterproblem blir.

$$\begin{array}{rrcrcrcrcl} \max & z & = & 50000\lambda_2 & + & 12000\lambda_3 & + & 14000\lambda_4 & & \\ \text{s.t.} & & & 60\lambda_2 & + & 10\lambda_3 & + & 20\lambda_4 & \leq & 11 \\ & & & 60\lambda_2 & + & 20\lambda_3 & + & 10\lambda_4 & \leq & 13 \\ & & & \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4 & & & = & 1 & & \end{array}$$

med optimallösning $\lambda = (0.2, 0, 0.5, 0.3)$ och dual lösning $(533.33, 333.33, 0)$

Nya interna priset på bitar blir 533 för stora och 333 för små. Med dessa priser lönar det sig inte att producera något -> vi kan inte hitta någon inkommande kolumn med negativ reducerad kostnad. Därmed hittar vi ingen inkommande variabel varför vi vet att vi har den optimala lösningen.

Vi skall därför producera 0.5 av plan 3 och 0.3 av plan 4 d.v.s 5 Europeiska stolar och 3 Japanska bord.

Representationssatsen

Varför fungerar denna metod? Representationssatsen säger att varje punkt x i en begränsad polytop X kan uttryckas som en konvexkombination av polytopens hörnpunkter. Om vi kallar polytopens olika hörnpunkter för x^i så existerar det för varje $x \in X$ en vektor λ så att

$$x = \sum_i \lambda_i x^i$$
$$\sum_i \lambda_i = 1$$
$$\lambda_i \geq 0$$

Denna karaktärisering av X är därför likvärdig med

$$Dx = d, x \geq 0$$

Vi skall nu visa att vi ej behöver ta med samtliga hörn av polytopen. Vi betraktar masterproblemet och antar att vi har en komplett samling hörn till polytopen. Simplex inkommande-kriterium säger att vi skall välja en variabel λ_i som inkommande om den minimerar

$$\begin{aligned} \bar{f}_i &= f_i - f_b B^{-1} E_{\cdot,i} \\ &= f_i - (\pi^{\mathrm{T}}, \gamma) E_{\cdot,i} < 0 \end{aligned}$$

Vi har definitioner

$$f_i = c^{\mathrm{T}} x_i$$
$$E_{\cdot,i} = \begin{pmatrix} Ax^i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Att hitta inkommande är samma sak som att hitta det hörn till X som minimerar $\bar{f}_i$, viket är samma sak som att lösa

$$\begin{array}{rrl} \min\limits_x & c^{\mathrm{T}}x & -\pi^{\mathrm{T}}Ax + \gamma \\ \text{Då} & Dx & = d \\ & x & \geq 0 \end{array}$$

viket är ekvivalent med vårt sub-problem

$$\begin{array}{rrl} \min\limits_x & (c^{\mathrm{T}} - \pi^{\mathrm{T}}A)x + \pi^{\mathrm{T}}b & \\ \text{Då} & Dx = d & \\ & x \geq 0 & \end{array}$$

Därmed har vi hittat den optimala lösningen om den senast genererade hörnpunkten x^i ej har en negativ reducerad kostnad i master-problemet.

Obegränsade polytoper

Vad händer om polytopen X given tidigare är obegränsad? Som tidigare ger representations-satsen att vi kan uttrycka varje punkt i en obegränsad polytop som en konvexkombination av hörnpunkter plus en positiv kombination av extrema riktningar y.

$$x = \sum_i \lambda_i x^i + \sum_j \rho_j y_j$$
$$\sum_i \lambda_i = 1$$
$$\lambda_i, \rho_j \geq 0$$

Extrema riktningar

En extrem riktning y är dels obegränsad, d.v.s

$$\begin{array}{rl} Dy & = 0 \\ y & \geq 0 \end{array}$$

Vidare existerar det ej två andra extrema riktningar $\bar{y}, \hat{y}$ så att

$$y = \frac{1}{2}(\bar{y} + \hat{y})$$

Separabla problem

Om vi har ett separabelt problem, d.v.s X ges av

$$D_k x_k = d_k$$

så kan vi skapa ett x_k för varje delpolytop. Masterproblemet blir därmed

$$\begin{array}{rll} \max\limits_{\lambda} & \sum_k \sum_i \lambda_{i,k} (c_k^{\mathrm{T}} x_k^i) & \\ \text{Då} & \sum_k \sum_i \lambda_{i,k} (A_k x_k^i) & = b \\ & \sum_i \lambda_{i,k} & = 1 \quad \forall k \\ & \lambda_{i,k} \geq 0 & \end{array}$$

LEGO international igen

Vi har starlösningar $x_1^1 = (0,0,0,0)$ och $x_2^1 = (0,0,0,0)$ d.v.s varken Europa eller Japan producerar något.

Vi har $\hat{c}_1^1 = c^{\mathrm{T}} x_1^1 = 0$ samt $\hat{c}_2^1 = c^{\mathrm{T}} x_2^1 = 0$

P.S.S har vi $\hat{A}_1 = \begin{bmatrix} A_1 x_1^1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\hat{A}_2 = \begin{bmatrix} A_1 x_1^1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Vår masterproblem blir:

$$\begin{array}{rrcl} \max & z & = & 0 * \lambda_1 + 0 * \eta_1 \\ \text{s.t.} & 0\lambda_1 + 0\eta_1 & \leq & 11 \\ & 0\lambda_1 + 0\eta_1 & \leq & 13 \\ & \lambda_1 & = & 1 \\ & \eta_1 & = & 1 \end{array}$$

med lösning $\lambda_1 = \eta = 1$ och dual lösning $y = (0,0,0,0)$.

De nya hörnpunkterna blir nu
$x_1^2 = (10,10,30,40), x_2^2 = (10,10,30,20)$

Vi har $\hat{c}_1^2 = 28000, \hat{c}_2^2 = 22000$

P.S.S har vi $\hat{A}_1^2 = \begin{bmatrix} Ax_1^2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 40 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\hat{A}_2^2 = \begin{bmatrix} Ax_1^2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 20 \\ 1 \end{bmatrix}$

Vårt nya masterproblem blir.

$$\begin{array}{rrcl} \max & z & = & 28000\lambda_2 + 22000\eta_2 \\ \text{s.t.} & 30\lambda_2 + 30\eta_2 & \leq & 11 \\ & 40\lambda_2 + 20\eta_2 & \leq & 13 \\ & \lambda_1 + \lambda_2 & = & 1 \\ & \eta_1 + \eta_2 & = & 1 \end{array}$$

Den optimala duallösningen blir

$$y = (533.333, 300)$$

d.v.s stora bitar kostar 533.33333 , små kostar 300

Lego-Europa

Lego-Europa får problemet

$$\begin{array}{rrcrcrcrl} \max & z & = & 1600x_1 & + & 1200x_2 & - & 533.33x_5 & -300x_6 \\ \text{s.t.} & 2x_1 & + & x_2 & = & x_5 & & & \text{(stora)} \\ & 2x_1 & + & 2x_2 & = & x_6 & & & \text{(små)} \\ & & & x_1,\ x_2 & \geq & 0 & & & \leq 10 \end{array}$$

vilket ger att vi skall producera 10 stolar.

Lego-Japan

Lego-Japan får problemet

$$\begin{array}{rrcrcrcrl} \max & z & = & 1400x_3 & + & 800x_4 & - & 533.33x_7 & -300x_8 \\ \text{s.t.} & 2x_3 & + & x_4 & = & x_7 & & & \text{(stora)} \\ & x_3 & + & x_4 & = & x_8 & & & \text{(små)} \\ & & & x_3,\ x_4 & \geq & 0 & & & \leq 10 \end{array}$$

vilket ger att vi skall producera 10 bord.

Den nya hörnpunkten blir nu $x_1^3 = (0,10,10,20), x_2^3 = (10,0,20,10)$

Vi har $\hat{c}_1^2 = 12000, \hat{c}_2^2 = 14000$

P.S.S har vi $\hat{A}_1^3 = \begin{bmatrix} Ax_1^2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\hat{A}_2^3 = \begin{bmatrix} Ax_1^2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix}$

Vårt nya masterproblem blir.

$$\begin{array}{rl} \max z = & 28000\lambda_2 + 22000\eta_2 + 12000\lambda_3 + 14000\eta_3 \\ \text{s.t.} & 30\lambda_2 + 30\eta_2 + 10\lambda_3 + 20\eta_3 \leq 11 \\ & 40\lambda_2 + 20\eta_2 + 20\lambda_3 + 10\eta_3 \leq 13 \\ & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ & \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 1 \end{array}$$

Den optimala lösningen blir $\lambda_1 = (0.5, 0, 0.5), \lambda_2 = (0.7, 0, 0.3)$ d.v.s vi skall producera 5 Europeiska stolar och 3 Japanska bord.

Varför flera polytoper?

Genom att skapa flera polytoper kan vi (troligen) minska antalet iterationer. Priset vi får betala är en större och mer komplicerad master.

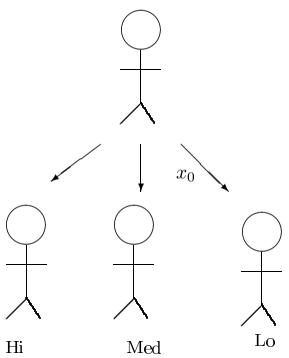
Inre representation

Den form av dekomposition vi just beskrivit brukar kallas inre representation.

Inre representation fungerar på dualen till stokastiska problem.

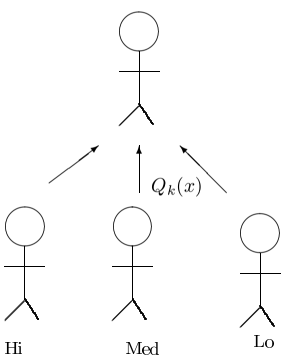
Vi kan även agripa dessa direkt med yttre representation, vilket är vad Benders metod gör.

L-shaped

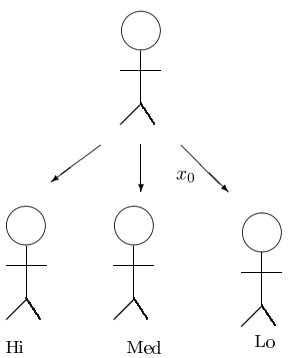


Lös
min $c^T x$
s.t $Ax = b$
och skicka lösningen x_0
till subproblemen
(Odla inget)

L-shaped



Varje scen löser
min $q_k^T y$
s.t $W_k y = h_k - T_k x$
och returnerar $Q_k(x)$
och stödjande ett hyperplan
$Q_k(x) \geq \pi_k(h_k - T_k x)$



Lös igen, med hänsyn
taget till subproblemen

Skicka lösningen x_0
till subproblemen
(Odla betor)