Optimering under osäkerhet

Föreläsning 8, lp1 2003

Ann-Brith Strömberg

5 september 2003

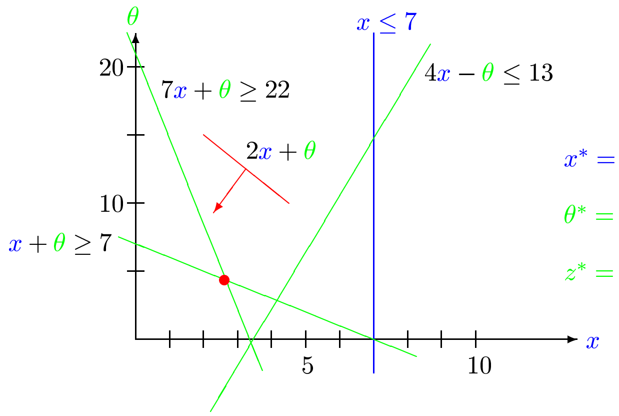
LP-formulering av exemplet

$$\mathcal{Q}(x) = \max\{22-7x;\ 7-x;\ -13+4x\}$$

Hjälpvariabel: θ representerar $\mathcal{Q}(x)$ $\quad\Longrightarrow$

$$\left[\begin{array}{lccl} \min & 2x & + & \theta \\ \text{då} & x & \le & 7 \\ & x & \ge & 0 \\ & \theta & \ge & 22-7x \\ & \theta & \ge & 7-x \\ & \theta & \ge & -13+4x \end{array}\right] = \left[\begin{array}{lcccl} \min & 2x & +\theta & & \\ \text{då} & x & & \le & 7 \\ & x & & \ge & 0 \\ & 7x & +\theta & \ge & 22 \\ & x & +\theta & \ge & 7 \\ & 4x & -\theta & \le & 13 \end{array}\right]$$

LP-formulering av exemplet



$x^* = \frac{5}{2}$

$\theta^* = \frac{9}{2}$

$z^* = \frac{19}{2}$

Hur hittar vi y^*?

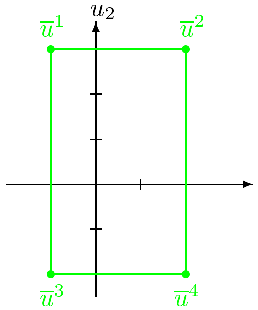
Lös subproblemet med optimalt värde på x:

$x^* = \frac{5}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{Q}(x^*) =$

$$\left[\begin{array}{ll} \min & 2y_1 + y_2 \\ \text{då} & y_1 - y_2 = 5 - 2\cdot\frac{5}{2} = 0 \\ & y_1, y_2 \ge 0 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{ll} \min & 3y_3 + 2y_4 \\ \text{då} & y_3 - y_4 = 4 - \frac{5}{2} = \frac{3}{2} \\ & y_3, y_4 \ge 0 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow y_1^* = y_2^* = y_4^* = 0, \quad y_3^* = \frac{3}{2}, \quad \mathcal{Q}(x^*) = \theta^* = \frac{9}{2}$

Exemplet: Inre representation av dualen



$$\bar{u}^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \bar{u}^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \mathcal{T} = \{1,2,3,4\}, \ \mathcal{S} = \emptyset$$

$$\bar{u}^3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \bar{u}^4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad u_1 \Leftrightarrow \ell = 1, \ u_2 \Leftrightarrow \ell = 2$$

$$\mathcal{Q}(x) = \max_{\lambda} \left\{ \sum_{t=1}^{4} (5-2x, 4-x)^T \bar{u}^t \lambda_t \,\middle|\, \sum_{t=1}^{4} \lambda_t = 1; \lambda_t \geq 0, \ t = 1,\dots,4 \right\}$$

$$\begin{aligned} = \max_{\lambda} \quad & (7-x)\lambda_1 + (22-7x)\lambda_2 + (-13+4x)\lambda_3 + (2-2x)\lambda_4 \\ \text{då} \quad & \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4 = 1; \qquad \lambda_t \geq 0, \quad t = 1,\dots,4 \end{aligned}$$

Duala extremlösningar ⇔ linjära segment hos $\mathcal{Q}$

$$\begin{array}{lcccl} 7-x > \max\{22-7x; 4x-13; 2-2x\} & \Leftrightarrow & \frac{5}{2} < x < 4 & \Leftrightarrow & \lambda_1 = 1 \\ 22-7x > \max\{7-x; 4x-13; 2-2x\} & \Leftrightarrow & x < \frac{5}{2} & \Leftrightarrow & \lambda_2 = 1 \\ 4x-13 > \max\{7-x; 22-7x; 2-2x\} & \Leftrightarrow & x > 4 & \Leftrightarrow & \lambda_3 = 1 \\ 2-2x > \max\{7-x; 22-7x; 4x-13\} & \Leftrightarrow & x \in \emptyset & \Leftrightarrow & \lambda_4 = 1 \end{array}$$

Konvexkombinatiner av duala extremlösningar ⇔ skärning mellan linjära segment hos $\mathcal{Q}$

$$7-x = 22-7x \geq \max\{4x-13; 2-2x\} \Leftrightarrow x = \tfrac{5}{2} \Leftrightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

$$7-x = 4x-13 \geq \max\{22-7x; 2-2x\} \Leftrightarrow x = 4 \Leftrightarrow \lambda_1 + \lambda_3 = 1$$

$\mathcal{Q}(x)$ är styckvis linjär

- $\mathcal{Q}(x)$ är implicit definierad, som lösningen till ett optimeringsproblem
- Antal segment ($\theta \geq \cdots$, $0 \geq \cdots$) är väldigt många ($= |\mathcal{T}| + |\mathcal{S}|$)
- Approximera $\mathcal{Q}(x)$ med hjälp av de "hittills funna" segmenten
- Varje extrempunkt $\bar{u}^t_\ell$ svarar mot ett segment hos $\mathcal{Q}$
- Varje extremriktning $\tilde{u}^s_\ell$ svarar mot ett bivillkor (ett lodrätt segment hos $\mathcal{Q}$) som skär bort ett otillåtet x

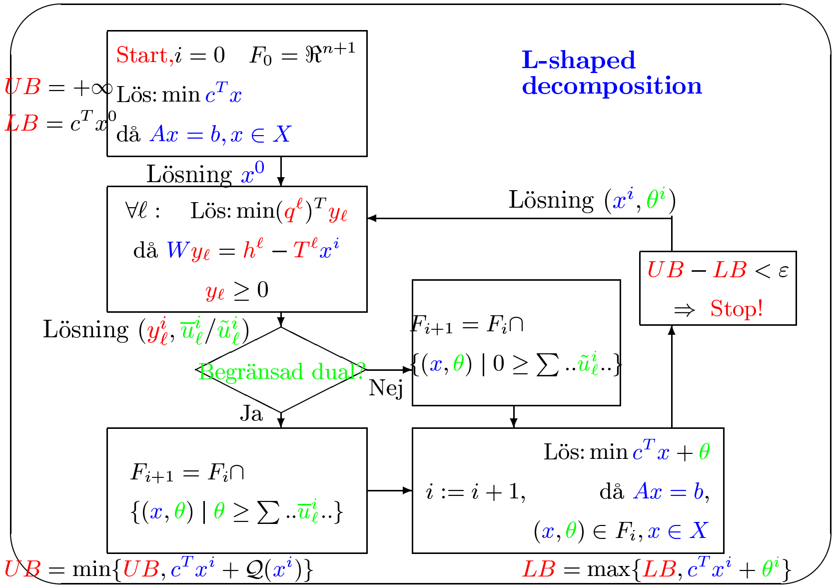
Hela problemet kan skrivas som

$$\begin{array}{rrcll} z^* = \min & c^T x & + & \theta & \\ \text{då} & Ax & = & b & \\ & \theta & \geq & \sum_{\ell \in \mathcal{L}} p^\ell (\bar{u}^t_\ell)^T (h^\ell - T^\ell x), \ t \in \mathcal{T} & (*) \\ & 0 & \geq & \sum_{\ell \in \mathcal{L}} p^\ell (\tilde{u}^s_\ell)^T (h^\ell - T^\ell x), \ s \in \mathcal{S} & (**) \\ & x & \in & X & \end{array}$$

- Bivillkoren $(*)$ och $(**)$ genereras allteftersom de behövs
- I värsta fall genereras alla bivillkor innan man hittat en optimallösning—ändligt många (duala extrempktr/riktn)
- Oftast—vilket är vitsen—genereras bara en del av bivillkoren

Algoritm (L-shaped decomposition)

1. $i = 0$, $F_0 = \Re^{n+1}$, $LB = -\infty$, $UB = +\infty$ Lös masterproblemet $\min\{c^T x \mid Ax = b, x \in X\} \Rightarrow$ Lösning x^0, $LB = c^T x^0$
2. Lös subproblemen $\min\{(q^\ell)^T y \mid W y = h^\ell - T^\ell x^i, y \geq 0\}$, $\ell \in \mathcal{L}$ $\Rightarrow$ Primal lösning y_i^ℓ och dual lösning $\bar{u}_i^\ell$ (alt. $\tilde{u}_i^\ell$)
3. Om duallösningen begränsad (d.v.s. x^i tillåten) så låt $F_{i+1} := F_i \cap \{(x, \theta) \mid \theta \geq \sum_{\ell \in \mathcal{L}} p^\ell (\bar{u}_i^\ell)^T (h^\ell - T^\ell x)\}$, $UB = \min\{UB; c^T x^i + \sum_{\ell \in \mathcal{L}} p^\ell (q^\ell)^T y^i\}$
   Om duallösningen obegränsad (d.v.s. x^i ej tillåten) så låt $F_{i+1} := F_i \cap \{(x, \theta) \mid 0 \geq \sum_{\ell \in \mathcal{L}} p^\ell (\tilde{u}_i^\ell)^T (h^\ell - T^\ell x)\}$
4. Låt $i := i + 1$. Lös masterproblemet $\min\{c^T x + \theta \mid Ax = b, (x, \theta) \in F_i, x \in X\} \Rightarrow$ Lösning (x^i, θ^i), $LB = \max\{LB; c^T x^i + \theta^i\}$. Gå till 2.



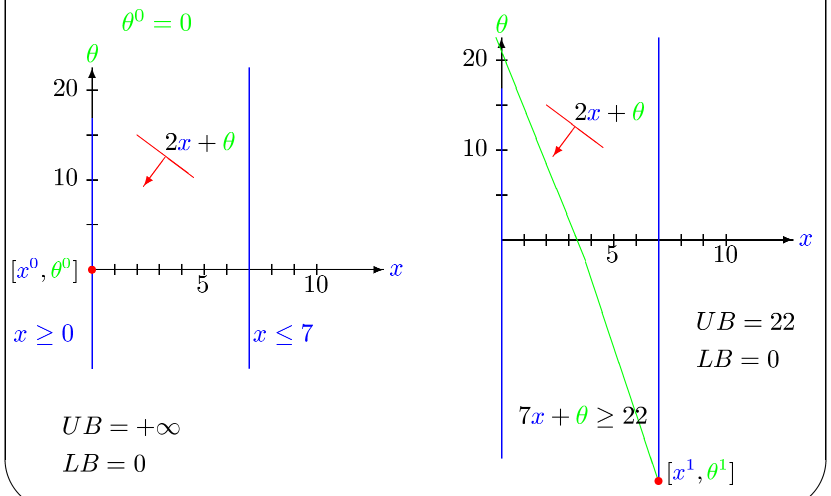
Exemplet igen

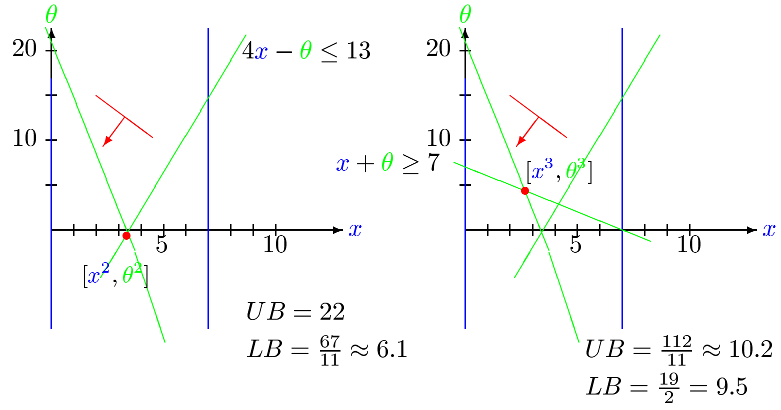
- Master ($\theta^0 = 0$): $\min\{2x \mid 0 \leq x \leq 7\} \Rightarrow x^0 = 0$, $LB = 0$
- Subproblem:
  $\min\{2y_1 + y_2 \mid y_1 - y_2 = 5; y_1, y_2 \geq 0\} \Rightarrow y_1^0 = 5, y_2^0 = 0$, $u_1^0 = 2$
  $\min\{3y_3 + 2y_4 \mid y_3 - y_4 = 4; y_3, y_4 \geq 0\} \Rightarrow y_3^0 = 4, y_4^0 = 0$, $u_2^0 = 3$
  $UB = \min\{\infty; 0 + 10 + 12\} = 22$
- Nytt bivillkor: $\theta \geq 2 \cdot (5 - 2x) + 3 \cdot (4 - x) = 22 - 7x$
- Master: $\min\{2x + \theta \mid 0 \leq x \leq 7;\ \theta \geq 22 - 7x\}$
  $\Rightarrow x^1 = 7$, $\theta^1 = -27$,
  $LB = \max\{0; 14 - 27\} = 0$

- Subproblem:
  $\min\{2y_1 + y_2 \mid y_1 - y_2 = -9; y_1, y_2 \geq 0\}$
  $\Rightarrow y_1^1 = 0, y_2^1 = 9$, $u_1^1 = -1$
  $\min\{3y_3 + 2y_4 \mid y_3 - y_4 = -3; y_3, y_4 \geq 0\}$
  $\Rightarrow y_3^1 = 0, y_4^1 = 3$, $u_2^1 = -2$,
  $UB = \min\{22; 14 + 9 + 6\} = 22$
- Nytt bivillkor: $\theta \geq (-1) \cdot (5 - 2x) + (-2) \cdot (4 - x) = -13 + 4x$
- Master: $\min\{2x + \theta \mid 0 \leq x \leq 7;\ \theta \geq 22 - 7x;\ \theta \geq -13 + 4x\}$
  $\Rightarrow x^2 = \frac{35}{11}$, $\theta^2 = -\frac{3}{11}$,
  $LB = \max\{0; \frac{70}{11} - \frac{3}{11}\} = \frac{67}{11}$

- Subproblem:
  $\min\{2y_1 + y_2 \mid y_1 - y_2 = -\frac{15}{11}; y_1, y_2 \geq 0\} \Rightarrow y_1^2 = 0, y_2^2 = \frac{15}{11}$,
  $u_1^2 = -1$
  $\min\{3y_3 + 2y_4 \mid y_3 - y_4 = \frac{9}{11}; y_3, y_4 \geq 0\} \Rightarrow y_3^2 = \frac{9}{11}, y_4^2 = 0$,
  $u_2^2 = 3$, $UB = \min\{22; \frac{70}{11} + \frac{15}{11} + \frac{27}{11}\} = 10 + \frac{2}{11}$
- Nytt bivillkor: $\theta \geq (-1) \cdot (5 - 2x) + 3 \cdot (4 - x) = 7 - x$
- Master:
  $\min\{2x + \theta \mid 0 \leq x \leq 7;\ \theta \geq 22 - 7x;\ \theta \geq -13 + 4x;\ \theta \geq 7 - x\}$
  $\Rightarrow x^3 = \frac{5}{2}$, $\theta^3 = \frac{9}{2}$, $LB = \max\{\frac{67}{11}; 5 + \frac{9}{2}\} = \frac{19}{2}$
- Subproblem:
  $\min\{2y_1 + y_2 \mid y_1 - y_2 = 0; y_1, y_2 \geq 0\} \Rightarrow y_1^3 = 0, y_2^3 = 0$, $u_1^3 = -1$
  $\min\{3y_3 + 2y_4 \mid y_3 - y_4 = \frac{3}{2}; y_3, y_4 \geq 0\} \Rightarrow y_3^3 = \frac{3}{2}, y_4^2 = 0$, $u_2^3 = 3$
  $UB = \min\{10 + \frac{2}{11}; 5 + \frac{9}{2}\} = \frac{19}{2} = LB \Rightarrow$ Klart!
- $x^* = \frac{5}{2}$, $y^* = (0, 0, \frac{3}{2}, 0)$, $z^* = \frac{19}{2}$

Illustration av L-shaped m.h.a. exemplet





Lös subproblem $\Rightarrow$ samma bivillkor $\Rightarrow UB = 9.5 \Rightarrow$ Klart!

Recourse

Välj t.ex.

- steg = tid (x före y)—Vettigt ur tillämpnings-synvinkel
- (relativt) lättlöst recourse-problem (matrisen W har “enkel” struktur) — skall lösas många gånger
- Ger ej alltid samma dekomponering av modellen!

$$Q(x, \xi^\ell) = \left[\begin{array}{ll} \min_y & (q^\ell)^T y \\ \text{då} & Wy = h^\ell - T^\ell x \\ & y \geq 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ll} \max_u & (h^\ell - T^\ell x)^T u \\ \text{då} & W^T u \leq q^\ell \end{array} \right]$$

- Om q^ℓ är deterministisk ($= q$) har alla recourse-problem samma dualt tillåtet område och tillåtna duala baslösningar!

$\Rightarrow$ Kan utnyttjas för att effektivisera algoritmer!

Recourse-strukturer

- **Fixed recourse:** Matrisen W beror ej av ξ^ℓ
- **Relatively complete recourse matrix W:**
  För varje $\xi^\ell \in \Xi$ och alla $x \in X$ s.t. $Ax = b$
  existerar ett $y \geq 0$ s.t. $Wy = h^\ell - T^\ell x$ ($\Leftrightarrow$ dualen begränsad),
  d.v.s., alla $x \in X$ s.t. $Ax = b$ är "tillåtna"
- **Complete recourse matrix W:**
  För alla $z \in \Re^m$ existerar ett $y \geq 0$ s.t. $Wy = z$
  d.v.s., tillåtenhet oberoende av Ξ.
- **Complete recourse $\Rightarrow$ Relatively complete recourse**
- Om relatively complete recourse *ej* gäller så behövs (lodräta) villkor av typen $0 \geq \sum_{\ell \in \mathcal{L}} p^\ell (\tilde{u}_\ell^s)^T (h^\ell - T^\ell x)$, ty dualen kan för vissa $x \in X$: $Ax = b$ vara obegränsad

Recourse-strukturer—fortsättning

- **Simple recourse:** $W = (I, -I)$
  Under- resp. överskott i likhetsvillkor modelleras med separata straffkostnader.
- Bivillkoret $T^\ell x = h^\ell$ kan modellerats som $T^\ell x + y_1^\ell - y_2^\ell = h^\ell$
- Generalisering av exemplet ger recourseproblemet (med dual):

$$\left[\begin{array}{ll} \min & q_1^T y_1 + q_2^T y_2 \\ \text{då} & I y_1 - I y_2 = h - Tx \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \max & (h - Tx)^T u \\ \text{då} & Iu \leq q_1 \\ & -Iu \leq q_2 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow$ Recourse-problemet kan lösas analytiskt:
$(h - Tx)_i > 0 \quad \Rightarrow \quad u_i = q_{1_i}, \quad y_{1_i} = (h - Tx)_i, \quad y_{2_i} = 0$
$(h - Tx)_i < 0 \quad \Rightarrow \quad u_i = -q_{2_i}, \quad y_{2_i} = -(h - Tx)_i, \quad y_{1_i} = 0$

Recourse-strukturer—fortsättning

- **Simple recourse $\Rightarrow$ complete recourse**
- **Network recourse:** W beskriver ett nätverksflöde
  (t.ex. fiskeriexemplet) Lättlöst LP-problem
- **Network recourse $\Rightarrow$ complete recourse** (oftast)
- **Integer recourse:**
  Recourse-problemet har heltalsvillkor
  Ger icke-kontinuerlig, icke-konvex recourse-funktion $\mathcal{Q}$
  Behandlas senare i kursen