Chalmers tekniska högskola
Matematiska institutionen
Ann-Brith Strömberg & Fredrik Altenstedt

1 oktober 2003
TMA136/MAM350
Optimering under osäkerhet

Inlämningsuppgifter

Detta kompendium innehåller instruktioner och material för inlämningsuppgifter i kursen Optimering under osäkerhet, höstterminen 2003. Uppgifterna C–E är ej klara vid pressläggningen utan delas ut senare.

Innehåll

A Tidningsbudsproblemet

Ett tidningsbud går varje morgon till tidningsutgivaren och köper x exemplar av dagens tidning till ett pris av c per styck. Det antal han köper har vanligtvis en övre gräns, u, som motsvarar antingen budets säljförmåga eller en gräns som utgivaren har satt för varje tidningsbud. Sedan går tidningsbudet ut och säljer så många tidningar som möjligt för försäljningspriset q, där $q > c$. Alla osålda tidningar kan säljas tillbaka till utgivaren för återköpspriset r, där $r < c$. Det antas att tidningsbudet inte kan återvända till utgivaren under dagen för att köpa fler tidningar, eftersom andra tidningsbud redan har köpt de återstående tidningarna. Han kan inte heller sälja dagens tidning i morgon, eftersom läsarna vill ha färska nyheter.

Hur många exemplar av tidningen skall budet köpa varje morgon? Efterfrågan på tidningar varierar mellan olika dagar och beskrivs av den stokastiska variabeln $\boldsymbol{\xi}$.

För att beskriva budets vinst definierar vi y som försäljningsvolymen och w som det antal tidningar som återköps av utgivaren på kvällen. Vi kan då formulera problemet som

$$\begin{array}{ll} \min & c \cdot x + \mathcal{Q}(x) \\ \text{då} & 0 \le x \le u \end{array}$$

där

$$\mathcal{Q}(x) = E_{\boldsymbol{\xi}} Q(x, \boldsymbol{\xi})$$

och

$$\begin{aligned} Q(x,\boldsymbol{\xi}) = \min -q \cdot y(\boldsymbol{\xi}) - r \cdot w(\boldsymbol{\xi}) & & \\ \text{då} \qquad\qquad\qquad y(\boldsymbol{\xi}) &\leq \boldsymbol{\xi} \\ y(\boldsymbol{\xi}) + w(\boldsymbol{\xi}) &\leq x \\ y(\boldsymbol{\xi}), w(\boldsymbol{\xi}) &\geq 0 \end{aligned}$$

och $E_{\boldsymbol{\xi}}$ betecknar väntevärdet med avseende på $\boldsymbol{\xi}$. Här motsvarar $-\mathcal{Q}(x)$ den förväntade vinsten vid försäljning och återköp, medan $-Q(x, \boldsymbol{\xi})$ är vinsten vid försäljning och återköp då efterfrågan är på nivån $\boldsymbol{\xi}$.

Modellen illustrerar två-stegskaraktären hos tidningsbudets problem. Beslutet om hur många tidningar budet skall köpa måste fattas på morgonen, innan han vet dagens efterfrågan. När efterfrågan är känd, i det så kallade andra steget, i slutet av försäljningsperioden för det aktuella numret, kan vinsten beräknas enligt

$$\begin{aligned} y^*(\boldsymbol{\xi}) &= \min\{\boldsymbol{\xi}, x\}, \\ w^*(\boldsymbol{\xi}) &= \max\{x - \boldsymbol{\xi}, 0\}. \end{aligned}$$

Försäljningsvolymen kan aldrig överstiga antalet tillgängliga tidningar och ej heller efterfrågan. Återköp görs endast då efterfrågan är lägre än antalet tillgängliga tidningar. Väntevärdesfunktionen för steg två ges av

$$\mathcal{Q}(x) = E_{\boldsymbol{\xi}}[-q \cdot \min(\boldsymbol{\xi}, x) - r \cdot \max(x - \boldsymbol{\xi}, 0)].$$

Denna funktion är konvex och kontinuerlig eftersom $q > r$. Då $\boldsymbol{\xi}$ är en kontinuerlig stokastisk variabel är $\mathcal{Q}$ också differentierbar. I detta fall ges lösningen till tidningsbudsproblemet av

$$x = \begin{cases} 0 & \text{om} \qquad c + \mathcal{Q}'(0) > 0, \\ u & \text{om} \qquad c + \mathcal{Q}'(u) < 0, \\ \text{lösningen till } c + \mathcal{Q}'(x) = 0 & \text{annars,} \end{cases}$$

där $\mathcal{Q}'(x)$ betecknar första ordningens derivata av $\mathcal{Q}$ i punkten x.

Funktionsvärdet för $\mathcal{Q}$ i punkten x kan beräknas enligt

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(x) &= \int_{-\infty}^{x} (-q\xi - r(x - \xi))\ dF(\xi) + \int_{x}^{\infty} (-qx)\ dF(\xi) \\ &= -(q - r)\int_{-\infty}^{x} \xi\ dF(\xi) - rxF(x) - qx(1 - F(x)), \end{aligned}$$

där $F(\boldsymbol{\xi})$ betecknar den kumulativa fördelningsfunktionen för $\boldsymbol{\xi}$ och $dF(\xi) = f(\xi)d\xi$. Med hjälp av partiell integration följer att

$$\mathcal{Q}(x) = -qx + (q - r)\int_{-\infty}^{x} F(\xi)\ d\xi,$$

så att

$$\mathcal{Q}'(x) = -q + (q - r)F(x).$$

Lösningen ges därför av

$$x^* = \begin{cases} 0 & \text{om} \quad \frac{q-c}{q-r} < F(0), \\ u & \text{om} \quad \frac{q-c}{q-r} > F(u), \\ F^{-1}(\frac{q-c}{q-r}) & \text{annars,} \end{cases}$$

där $F^{-1}(\alpha)$ är α-kvantilen för F. Om F är kontinuerlig så innebär $x = F^{-1}(\alpha)$ att $\alpha = F(x)$. En rimlig beskrivning av efterfrågan bör implicera $F(0) = 0$, vilket innebär att lösningen aldrig kan vara $x^* = 0$.

Tidningsbudsproblemet är ett exempel på ett stokastiskt optimeringsproblem med "simple recourse".

Uppgift

Antag att $c = 10$, $q = 25$, $r = 5$ och att efterfrågan är likformigt fördelad på intervallet $[50, 150]$. Finn optimallösningen till det modifierade problemet. Finn också lösningen till en motsvarande deterministisk modell med efterfrågan 100. Beräkna (den relativa) differensen mellan värdet av den lösning som erhålls då man tar hänsyn till sannolikhetsfördelningen hos efterfrågan och det värde som får då efterfrågan antas vara deterministisk (100). Skriv en kort redogörelse för vad du kommit fram till och hur.

B Ett exempel från spannmålsodling

En bonde har 500 tunnland att odla vete, majs och sockerbetor på. Kostnaderna för utsäde, räknat i \$/tunnland, är 150, 230 och 260 för vete, majs respektive sockerbetor. Avkastningen för dessa grödor, vilken inte är helt känd i förväg, är stokastiska variabler och betecknas med $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ respektive $\mathbf{a}_3$ ton/tunnland. Bonden behöver för eget bruk 200 ton vete och 240 ton majs och inköpspriserna för dessa efter skörd är 238 respektive 210 \$/ton. Försäljningspriserna efter skörd är 170 och 150 \$/ton för vete respektive majs. Priset för sockerbetor är 36 \$/ton upp till maximalt 6000 ton och 10 \$/ton för det som därutöver säljs. Vi definierar variabler enligt:
x_j = antal tunnland som besås med gröda $j = 1, 2, 3$, där 1=vete, 2=majs, 3=sockerbetor;
y_j = antal ton som köps in av gröda $j = 1, 2$;
w_j = antal ton som säljs av gröda $j = 1, 2, 3, 4$, där 3(4)=sockerbetor, högt(lågt) pris,
och formulerar sedan en optimeringsmodell för att maximera bondens vinst enligt

$$\begin{array}{rlll} z^* = \max & -150x_1 - 230x_2 - 260x_3 - 238y_1 - 210y_2 + 170w_1 + 150w_2 + 36w_3 + 10w_4, & & \\ \text{då} & x_1 + x_2 + x_3 & \leq & 500, \\ & \mathbf{a}_1 x_1 + y_1 - w_1 & \geq & 200, \\ & \mathbf{a}_2 x_2 + y_2 - w_2 & \geq & 240, \\ & \mathbf{a}_3 x_3 - w_3 - w_4 & \geq & 0, \\ & w_3 & \leq & 6000, \\ & x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, w_1, w_2, w_3, w_4 & \geq & 0. \end{array}$$

För att denna modell skall kunna leda till en optimal fördelning av arealen måste bonden före sådden veta hur stor avkastningen kommer att bli.

Antag att 3 olika scenarion kan inträffa, vart och ett med sannolikheten $\frac{1}{3}$. Scenario 1 motsvaras av en avkastning som är 20% under väntevärdet, $a_{\cdot 1} = (2, 2.4, 16)$, scenario 2

av förväntat värde, $a_{\cdot 2} = (2.5, 3, 20)$, och scenario 3 av en avkastning som är 20% över väntevärdet, $a_{\cdot 3} = (3, 3.6, 24)$. Definiera nya variabler enligt:
y_{js} = antal ton av gröda j som köps in vid scenario $s = 1, 2, 3$;
w_{js} = antal ton av gröda j som säljs vid scenario $s = 1, 2, 3$.
Vi kan då formulera följande scenariomodell:

$$\begin{array}{llll}
\max & -150x_1 - 230x_2 - 260x_3 + \frac{1}{3}\sum_{s=1}^{3}(-238y_{1s} - 210y_{2s} + 170w_{1s} + 150w_{2s} + 36w_{3s} + 10w_{4s}), & & \\
\text{då} & x_1 + x_2 + x_3 & \leq 500, & \\
& a_{1s}x_1 + y_{1s} - w_{1s} & \geq 200, & s = 1, 2, 3, \\
& a_{2s}x_2 + y_{2s} - w_{2s} & \geq 240, & s = 1, 2, 3, \\
& a_{3s}x_3 - w_{3s} - w_{4s} & \geq 0, & s = 1, 2, 3, \\
& w_{3s} & \leq 6000, & s = 1, 2, 3, \\
& x_1, x_2, x_3, y_{1s}, y_{2s}, w_{1s}, w_{2s}, w_{3s}, w_{4s} & \geq 0, & s = 1, 2, 3.
\end{array}$$

Det optimala fördelningen av arealen blir $x^* = (170, 80, 250)$. Beroende på vilket scenario som sedan inträffar kommer bonden att köpa in och sälja olika mängder enligt:

$$[y^*_{\cdot 1}, y^*_{\cdot 2}, y^*_{\cdot 3}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 48 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ och } [w^*_{\cdot 1}, w^*_{\cdot 2}, w^*_{\cdot 3}] = \begin{bmatrix} 140 & 225 & 310 \\ 0 & 0 & 48 \\ 4000 & 5000 & 6000 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vinsten blir vid olika scenarion: $z_1^* = \$48,820$, $z_2^* = \$109,350$ samt $z_3^* = \$167,000$. Den genomsnittliga vinsten per år, under många år, blir med scenariemodellen $\$108,390$.

Uppgifter

Följande övningar utgår alla från grundvarianten av odlingsexemplet. För varje uppgift skall du göra några förändringar i den ursprungliga matematiska modellen och lösa det nya stokastiska optimeringsproblemet med hjälp av någon standardprogramvara för lösning av linjära (heltals-)optimeringsproblem (AMPL & Cplex). Skriv en kort rapport om vad du kommit fram till.

1. [Värdet av den stokastiska lösningen (VSS)]

   Antag att bonden använder sin mark enligt den lösning som baseras på att avkastningen är den förväntade, d.v.s., 120 tunnland vete, 80 tunnland majs och 300 tunnland sockerbetor. Visa att om avkastningen är stokastisk (20% över, lika med och 20% under förväntat värde, med sannolikheten en tredjedel vardera) så blir den förväntade årliga vinsten $\$107,240$. Observera att kostnaden för sådd är känd i förväg men att den mängd gröda som säljs/köps in efter skörd beror av avkastningen, som är osäker. Gör en tabell över hur mycket av de olika grödorna som skördas, köps in och säljs under tre olika scenarion, då steg ett–lösningen $x = (120, 80, 300)$ enligt ovan används.

2. [Priseffekt]

   När avkastningen är god för en bonde så är den vanligtvis god för många andra bönder också. Tillgången ökar alltså, vilket medför sjunkande inköps- och försäljningspriser för bönderna. Antag att priserna på majs och vete blir 10% lägre än ordinarie priser då avkastningen är 20% högre än förväntat och att de blir 10% högre då avkastningen är 20% lägre än förväntat. Formulera en modell där dessa prisförändringar påverkar både inköp och försäljning och majs och vete. Antag att priset på sockerbetor inte påverkas av avkastningen. Lös optimeringsproblemet samt beräkna även det förväntade värdet av perfekt information (EVPI) och värdet av den stokastiska lösningen (VSS).

3. [Binärt första steg]

   Antag att bonden har fyra åkrar med arealerna 185, 145, 105 respektive 65 tunnland. Notera att totala arealen om 500 tunnland är oförändrad. Eftersom detta hände innan det laga skiftet ägde rum är dessa åkrar belägna i olika delar av byn. För att effektivisera sitt arbete vill bonden därför odla endast en typ av gröda på varje åker. Formulera denna modell som ett två–stegs stokastiskt optimeringsproblem där steg 1–problemet har binära variabler. Finn en lösning till optimeringsproblemet, beräkna det förväntade värdet av perfekt information (EVPI) och värdet av den stokastiska lösningen (VSS).

4. [Riskobenägenhet]

   Enligt ekonomisk teori är en bonde vanligen, i likhet med de flesta andra, obenägen att ta risker. Det finns olika sätt att modellera riskobenägenhet. En simpelt sätt är att planera för det värsta som kan hända. Mer precist handlar det då om att maximera vinsten under förutsättning att det värsta möjliga scenariot inträffar. Notera att för vissa modeller kan man inte i förväg veta vilket scenario som kommer att ge den lägsta vinsten. I odlingsexemplet motsvaras den sämsta tänkbara situationen av scenario 3 (avkastningen 20% under förväntat värde). Att planera för det värsta som kan hända innebär då att lösningen 100 tunnland vete, 25 tunnland majs och 375 tunnland sockerbetor är optimal, med en årlig vinst om lägst $59,950.

   (a) Beräkna minskningen av förväntad vinst om denna lösning väljs jämfört med då lösningen från den stokastiska modellen används.

   (b) Ett vettigt angreppssätt kan vara att kräva en minimivinst även om det värsta möjliga scenariot inträffar (man försäkrar sig under varje enskilt år mot en alltför liten vinst eller stor förlust). Finn en lösning som maximerar den förväntade vinsten under förutsättning att då det sämsta scenariot inträffar får det årets vinst inte understiga $58,000. Hur mycket mindre blir den förväntade vinsten?

   (c) Upprepa uppgift 4b för andra nivåer på accepterad minimal vinst: $56,000, $54,000, $52,000, $50,000 respektive $48,000. Gör en graf över förväntad minskning av vinsten.

   (d) Jämför variabelvärdena med dem som erhålls då vi *inte* kräver en lägsta vinst. Jämför också med det beslut som erhålls då vi utgår från att det sämsta scenariot inträffar (deterministisk modell) och att inget krav finns på lägsta vinst.

C Modellering och lösning av recourseproblem

Den nya, utökade versionen—1 oktober 2003

Följande övningar ger upphov till stokastiska optimeringsproblem som kan lösas med standard-programvara för linjär (heltals)optimering. Var och en skall formulera matematiska modeller för alla fem uppgifterna, men lösa endast en av dem (vilken ges av formeln

"$n \mod 5$" där $n =$ gruppnummer) med hjälp av AMPL och Cplex. Ett bra tips är att börja med att modellera den uppgift som skall lösas numerisk och sedan fortsätta med de övriga. Beräkna även värdet av den stokastiska lösningen (VSS). Skriv en kort rapport om modellerna och lösningarna och analysera resultaten.

NEDANSTÅENDE VERSION AV BESKRIVNINGARNA INNEHÅLLER DE UTÖKADE PROBLEMSTORLEKAR SOM SKALL UTREDAS I REDOVISNINGARNA.

1. [SEKTIONSINDELNING I FLYGPLAN]

   Flygbolaget Västkustflyg vill bestämma hur man skall dela upp platserna i ett nytt plan som skall trafikera sträckan Göteborg–Malmö. Planet har plats för 200 passagerare i ekonomiklass. En sektion kan avdelas för förstaklasspassagerare, men var och en av dessa stolar tar lika mycket utrymme som två stolar i ekonomiklass. Man kan också ha en sektion för affärsklass; var och en av dessa stolar tar lika mycket utrymme som en och en halv stol i ekonomiklass. Intäkterna från en såld första-(affärs)klassbiljett är emellertid 3.3 (2.1) gånger intäkterna från en såld ekonomiklassbiljett. Man vill maximera de förväntade totala intäkterna per vecka från planet. När stolarna i planet en gång har blivit indelade i sektioner för olika biljettklasser kan denna indelning inte ändras. Man vet emellertid att planet inte alltid kommer vara fullbokat i alla sektioner. Man antar att sex olika scenarion kommer att inträffa med frekvenserna $\frac{2}{9}/\frac{1}{9}$ för a/b-alternativen: (1a/b) morgon- och kvällstrafik på vardagar, (2a/b) helgtrafik och (3a/b) lunchtrafik på vardagar. Under scenario 1a/b tror man att man kan sälja så mycket som 20/25 första-, 50/55 affärs- och 200/180 ekonomiklassbiljetter. Under scenario 2a/b är motsvarande värden 10/10, 25/10 respektive 175/200, och under scenario 3a/b är de 5/5, 10/30 respektive 150/130. Man kan inte sälja fler biljetter av en viss klass än det finns stolar i motsvarande sektion eller i någon sektion av bättre klass.

   (I verkligheten kan man tillåta överbokning, men då beaktar man problemet att ta hänsyn till att en del passagerare med reservationer inte dyker upp.)

2. [PRODUKTIONSPLANERING]

   Tomatbolaget (TB) tillverkar tomatpuré, ketchup och salsa med hjälp av fyra olika ingredienser: arbetskraft, tomater, socker och kryddor. För framställning av en låda tomatpuréburkar krävs 0.5 mantimmar, 1.0 korg tomater, inget socker och 0.25 burk kryddor. Motsvarande för att framställa en låda ketchupflaskor är 0.8 mantimmar, 0.5 korg tomater, 0.5 påsar socker och 1.0 burk kryddor, och för att framställa en låda salsaburkar krävs 1.0 mantimmar, 0.5 korg tomater, 1.0 påse socker och 3.0 burkar kryddor.

   Företaget skall planera produktionen för de tre följande perioderna. Man har i var och en av perioderna tillgång till 200 mantimmar, 250 korgar tomater, 300 påsar socker och 100 burkar kryddor till ordinarie priser. Dock kan man betala extra för ytterligare resurser enligt: 1.6 per mantimma, 0.4 per tomatkorg, 0.8 per sockerpåse och 0.5 per kryddburk. Om man inte behöver utnyttja allt socker och kryddor i en period så kan kan man spara dem utan kostnad till nästa period; mantimmar och tomater kan dock inte sparas. De ordinarie produktionskostnaderna per låda av produkterna är 1.0 för tomatpuré, 1.5 för ketchup och 2.5 för salsa.

Efterfrågan i varje period är inte känd med säkerhet förrän efter det att produkterna för den perioden är tillverkade. TB förutsäger att det i varje period finns tre olika möjligheter, motsvarande en god, en dålig, och en extremt god ekonomi; dessa inträffar med sannolikhet 0.49, 0.49 respektive 0.02. I det goda fallet efterfrågas 200 lådor tomatpuré, 40 lådor ketchup och 20 lådor salsa; i det dåliga fallet reduceras dessa siffror till 100, 30 respektive 5; i det extremt goda fallet höjs siffrorna till 500, 80 respektive 25. Överproduktion av en produkt i en period kan lagras till nästa period till en kostnad av 0.5, 0.25 och 0.2 per låda av tomatpuré, ketchup respektive salsa. TB räknar också med att kostnaderna (d.v.s., förlust av goodwill) som uppkommer då efterfrågan i någon av perioderna inte tillgodoses är 2.0, 3.0 och 6.0 per låda av tomatpuré, ketchup respektive salsa. TB vill minimera summan av de totala förväntade kostnaderna för att tillfredsställa efterfrågan och för eventuell förlust av goodwill.

Jämför lösningen med den lösning som fås då man inte tar hänsyn till den extremt goda ekonomin; sannolikheterna för de övriga fallen blir då 0.5 vardera. Ifall de obegränsade Cplex-licenserna inte fungerar kan man (tillfälligtvis) lösa det mindre problemet (utan det extremt goda scenariet).

3. [Vattenreglering]

   Klarsjö–dammen kontrollerar vattennivån i Klarsjön, en välrenommerad rekreationsort i Drömland. Dammkommisionen vill bestämma hur mycket vatten som skall släppas ut under var och en av de närmaste fyra månaderna. Vattennivån i Klarsjön är för närvarande 150mm under högvattennivån. Dammen har kapacitet för en sänkning av vattennivån i sjön med 175mm per månad, men ytterligare nederbörd och avdustning påverkar också dammen.

   Vädret kring Klarsjön är mycket varierande. De två första månaderna har liknande väderförhållanden och samma sannolikhetsfördelning för väder. Detsamma gäller för de sista två månaderna. Vädret under var och en av de fyra månaderna är oberoende av vädret under övriga månader. I var och en av de två första månaderna är sannolikheten 1/2 för att den naturliga vattenhöjningen blir 100mm, och med sannolikheten 1/4 vardera är den naturliga sänkningen av nivån 50mm, respektive är den naturliga höjningen 250mm. I var och en av de två sista månaderna är sannolikheten 1/2 för att den naturliga vattenhöjningen blir 150mm, och med sannolikheten 1/4 vardera är den naturliga höjningen av nivån 50mm, respektive 350mm. Alla dessa värden motsvarar naturliga förändringar av vattennivån, utan dammutsläpp.

   Om vattnet under någon av månaderna stiger för högt beräknas kostnaderna för skador till $\$10,000$ per mm över högvattennivån och månad. En för låg vattennivå innebär att man måste pumpa upp vatten till höga kostnader: $5000 per mm som man måste höja vattenståndet för att nå upp till 400mm under högvattennivån. För var och en av månaderna antas att beslut om utsläpp av vatten fattas *innan* den naturliga vattenhöjningen alternativt -sänkningen har observerats (i verkligheten kan man naturligtvis justera utsläppen oftare än en gång per månad men för att erhålla en överskådlig och beräkningsbar modell görs denna begränsning).

   Man vill minimiera de totala förväntade kostnaderna alternativt minimera sannolikheten för att bryta mot högsta och/eller lägsta tillåtna vattennivå (den senare modellen ger upphov till en speciell typ av "chance constraints".) Modellera båda målfunktionerna. Lös endast den första numeriskt.

Ifall de obegränsade Cplex-licenserna inte fungerar kan man (tillfälligtvis) utesluta den fjärde månaden ur (den första) modellen.

4. [Planering av skogsavverkning]

Skogsbolaget skall besluta om hur man skall förvalta sitt skogsbestånd. Träden i beståndet är av varierande ålder, som indelas i klasserna $1, \ldots, 4$. För närvarande är 8000 tunnland av klass 1, $10,000$ av klass 2, $20,000$ av klass 3 och $60,000$ av klass 4. Varje klass motsvarar ungefär 25 års tillväxt; klass 1 är den yngsta och klass 4 den äldsta skogen. Man vill, för att maximera den förväntade avkastningen av skogen under det kommande seklet, bestämma hur mycket skog av de olika klasserna som skall avverkas under var och en av de fyra kommande 25-årsperioderna. Man förutser också att företaget skall finnas kvar efter ett sekel, så man kräver att det finns minst $10,000$, $15,000$ respektive $40,000$ tunnland av klass 2, 3 respektive 4 vid slutet av planeringshorisonten.

Olika timmerklasser ger olika avkastning vid avverkning. Klass 1 ger ingen avkastning, klass 2 ger 250 kubikfot per tunnland, klass 3 ger 510 kubikfot per tunnland och klass 4 ger 700 kubikfot per tunnland. Om inga skogsbränder inträffar är antalet tunnland av klass i (för $i = 2, 3$) i en period lika med antalet tunnland minus avverkad areal av klass $i - 1$ under föregående period. Klass 1 i period t består av total avverkad areal i period $t - 1$ (man planterar alltså nya träd inom några få år efter varje avverkning), medan klass 4 inkluderar summan den areal som var i klasserna 3 och 4 under period $t - 1$ minus avverkad areal av dessa klasser under period $t - 1$ (skogens avkastning ökar alltså inte efter 100 år).

Medan vädereffekter inte varierar mycket över 25-årsperioder kan förluster på grund av skogsbränder vara synnerligen varierande. Antag att under varje 25-årsperiod blir, med sannolikheten $0.33/0.66/0.01$, $15/5/25$ % av det totala timmerbeståndet förstört. I varje 25-årsperiod antas att man först fattar beslut om och avverkar skog, sedan inträffar eventuella skogsbränder. (Detta är en mycket grov förenkling eftersom man i verkligheten naturligtvis beslutar om avverkning betydligt mera ofta än så.) Antag att diskonteringsnivåerna överbryggas fullständigt av ökande värde på timret, så att all avverkning under 100-årsperioden har samma nuvärde. Vinsten är då proportionell mot den totala avkastningen av skogen.

5. [Schemaläggning för sjuksköterskor]

Vid akutintaget på ett sjukhus skall man planera bemanningen under en lördag, en söndag och en måndag. En sjuksköterska kan arbeta ordinarie tid vilka två av dagarna som helst till en kostnad av \$300 per dag. I regel kan en sköterska ta hand om 10 patienter under ett skift (d.v.s. en dag). Efterfrågan av vård är emellertid inte känd i förväg. Om det kommer in fler patienter än vad ordinarie sjuksköterskor kan ta hand om måste de arbeta övertid, till en kostnad av \$50 per ytterligare patient som tas om hand. Efterfrågan av sköterskor under lördagen är också en bra indikator för efterfrågan under påföljande söndag och måndag. Fler sköterskor kan kallas in för söndags- och måndagstjänstgöring efter det att lördagens efterfrågan har observerats, var och en av dessa arbetar antingen både söndag och måndag eller inte alls. Kostnaden per dag för extra sköterskor är dock \$400. Sjukhuset vill minimera den förväntade kostnaden för att tillgodose efterfrågan av sjuksköterskor.

Följande scenarier för de tre dagarnas efterfrågan inträffar med lika sannolikhet:

Scenario	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Lördag	100	100	100	90	90	90	80	80	80	110	110	110	70	70	70
Söndag	90	110	100	100	80	90	90	70	80	120	110	100	90	80	100
Måndag	120	120	110	110	110	100	100	100	90	100	90	100	80	90	90

D L-shaped decomposition

I denna uppgift skall ni köra "L-shaped decomposition" på en enklare variant av jordbruksproblemet från uppgift B. Tanken är att ni skall förstå bättre hur metoden fungerar genom att köra den "för hand". Problemet från uppgift B har modifierats genom att vi tagit bort betorna. Det kvarvarande problemet ser då ut som (omgjort till min-problem):

$$\begin{array}{llll}
\min & 150x_1 + 230x_2 + \frac{1}{3}\sum_{s=1}^{3}(238y_{1s} + 210y_{2s} - 170w_{1s} - 150w_{2s}), & & \\
\text{då} & x_1 + x_2 & \leq 500, & \\
& a_{1s}x_1 + y_{1s} - w_{1s} & \geq 200, & s = 1,2,3, \\
& a_{2s}x_2 + y_{2s} - w_{2s} & \geq 240, & s = 1,2,3, \\
& x_1, x_2, y_{1s}, y_{2s}, w_{1s}, w_{2s}, & \geq 0, & s = 1,2,3.
\end{array}$$

Vi delar nu upp detta problem i ett masterproblem och 3 sub-problem. Masterproblemet talar om vad vi gör i steg 1 och ser ut som:

$$\begin{array}{rrll}
\min & 150x_1 + 230x_2 + \theta & & \\
\text{då} & x_1 + x_2 & \leq 500, & \\
& e_i + d_{1i}(x_1 - \bar{x}_{1i}) + d_{2i}(x_2 - \bar{x}_{2i}) & \leq \theta, & i \in 1..k.
\end{array}$$

I denna formulering kommer θ att vara vår modell av recourse-funktionen $\mathcal{Q}(x)$ och antalet snitt ges av k. Om vi ej har några snitt måste θ fixeras till 0 (görs m.h.a. `fix theta;` i AMPL).

Dessutom får vi ett subproblem per scenario; dessa ges av

$$\begin{array}{rrll}
\min & Q_s(x_1,x_2) = 238y_{1s} + 210y_{2s} - 170w_{1s} - 150w_{2s} & & \\
\text{då} & a_{1s}x_1 + y_{1s} - w_{1s} & \geq & 200, \\
& a_{2s}x_2 + y_{2s} - w_{2s} & \geq & 240, \\
& y_{1s}, y_{2s}, w_{1s}, w_{2s} & \geq & 0.
\end{array}$$

För att förenkla körandet av algoritmen skriver vi dock om detta till det ekvivalenta problemet:

$$\begin{array}{rrlll}
\min & Q_s(x_1,x_2) = 238y_{1s} + 210y_{2s} - 170w_{1s} - 150w_{2s} & & & \\
\text{då} & (200 - y_{1s} + w_{1s})/a_{1s} & \leq & x_1, & (1) \\
& (240 - y_{2s} + w_{2s})/a_{2s} & \leq & x_2, & (2) \\
& y_{1s}, y_{2s}, w_{1s}, w_{2s} & \geq & 0 &
\end{array}$$

Observera att i detta problem är x_1 och x_2 ej variabler, utan fixa parametrar givna av optimallösningen till master-problemet.

Vi kan nu lösa hela problemet genom att omväxlande lösa master och sub-problem. Vi börjar med att lösa masterproblemet. Detta ger oss ett värden på x_1, x_2 som vi kan sätta in i de tre sub-problemen.

Löser vi nu det första sub-problemet får vi reda på hur mycket vi tjänar/förlorar i steg 2 *om vi använder den steg-1 lösning som vi fick från master-problemet.* Vidare, genom att titta på dual-variablerna π_{1s}, π_{2s} för bivillkor (1)–(2) får vi reda på hur mycket värdet på steg-2 lösningen förändras om vi ändrar högerledet i bivillkoren. Men högerleden för bivillkoren är exakt lösningen från masterproblemet (detta är anledningen till omformuleringen), varför vi får reda på hur mycket värdet för steg-2 lösningen ändras om vi ändrar steg-1 lösningen. Då värdet för ett linjärt minimerings-problem är en konvex funktion av högerledet, vet vi därmed att

$$Q_s(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \geq Q_s(x_1, x_2) + \pi_{1s}(\tilde{x}_1 - x_1) + \pi_{2s}(\tilde{x}_2 - x_2)$$

Då vi vet att recourse-funktionen ges av

$$\mathcal{Q}(x_1, x_2) = \sum_{s=1}^{3} \frac{1}{3} Q_s(x_1, x_2)$$

får vi att

$$\mathcal{Q}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \geq \sum_{s=1}^{3} \frac{1}{3} Q_s(x_1, x_2) + \pi_{1s}(\tilde{x}_1 - x_1) + \pi_{2s}(\tilde{x}_2 - x_2)$$

varför vi kan använda den duala lösningen från våra steg-2 problem till att konstruera ett snitt.

$$e_i + d_{1i}(x_1 - \bar{x}_{1i}) + d_{2i}(x_2 - \bar{x}_{2i}) \leq \theta$$

Multi-snitt

I algoritmen ovan är θ en modell av $\mathcal{Q}(x_1, x_2)$. Vi kan (möjligen) få bättre prestanda lösandet av modellen genom att bygga upp en modell för varje Q_s i stället. Om vi gör detta blir master-problemet i stället

$$\begin{array}{lrcll} \min & 150x_1 + 230x_2 + \sum_{s=1}^{3} \frac{1}{3}\theta_s & & & \\ \text{då} & x_1 + x_2 & \leq & 500, & \\ & e_{is} + d_{1si}(x_1 - \bar{x}_{1i}) + d_{2si}(x_2 - \bar{x}_{2i}) & \leq & \theta_s & s \in 1, \ldots, 3, \; i \in 1, \ldots, k \end{array}$$

och vi får snitt som

$$\theta_s \geq Q_s(x_1, x_2) + \pi_{1s}(\tilde{x}_1 - x_1) + \pi_{2s}(\tilde{x}_2 - x_2).$$

För att utföra denna uppgift behövs filer som kan kopieras till ert konto från /user/mdstud/ouo03/upgd. De filer som finns är fb_master.mod, fb_master.dat, fb_sub.mod, fb_sub[1-3].dat samt snitt.dat. Dessa innehåller data för masterproblemet och de tre sub-problemen.

Tips: Om ni vill underlätta körandet av problemen så kan ni använda ett ampl-fönster för varje problem, men se då till att använda studentversionen ampl_stud, ty annars tar licenserna slut. Ni kan lagra data för snitten i filen snitt.dat. Om ni har uppdaterat snitten så kan ni importera dessa till master-problemet genom att skriva `update data; data snitt.dat;`. Genom att skriva update data kan ni skriva över data utan att ampl klagar på att data redan existerar. Duala värdena för bivillkoren ser ni genom att skriva `display Required.dual;`.

Inlämnings/laborationsuppgifter

1. [Enkel-snitt]

   Lös det förenklade jordbruksproblemet med “enkelsnitt”. Genomför minst 4 iterationer (om ni ej hittar optimum innan dess). För varje iteration, ange vad som är den optimala steg-1 lösningen, samt en övre och undre gräns på målfunktionsvärdet på hela problemet. Förklara varifrån ni får den övre och undre gränsen.

2. [Multi-snitt]

   Modifiera filerna för att i stället köra multi-snitt, och genomför uppgifterna ovan. Konvergerar den övre och undre gränsen snabbare eller långsammare jämfört med föregående fall?

E Nyttofunktioner, Var, CVar och Markowitz

1. [Markowitz samt CAPM]

   Antag att vi för tillfället kan investera i antingen en riskfri ränta (bankkonto) eller en fond vilken motsvarar en andel av den totala marknaden. Räntor och varianser fås ur tabellen nedan. Antag vidare att det dyker upp en ny investeringsmöjlighet med given avkastning och varians/kovarians. Hur stor andel av vår portfölj skall vi investera i denna om vi använder oss av Markowitz metod och vill ha en avkastning på 0.06? Vilket avkastning skulle den nya tillgången ge om vi använde oss av CAPM. Motivera om resultaten stämer överens eller ej. Tips: Ni kan betrakta den riskfria räntan som en tillgång vilken som helst, med 0 varians och kovarians, och ta fram lämplig investering direkt.

	Riskfri ränta	Marknadsfond	Ny tillgång
Riskfri ränta	0	0	0
marknadsfond	0	0.04	0.01
Ny tillgång	0	0.01	0.04
Förväntad avkastning	0.04	0.08	0.06

Tabell 1: Kovariansmatris till uppgift 1

2. [Certainty equivalent,lognytta]

   Vi antar att vi kan investera pengar i ett riskfyllt företag. Avkastningar och sannolikheret för dessa ges nedan.

Sannolikhet	0.1	0.1	0.4	0.3	0.1
Utfall	1kr	50 kr	100kr	200kr	300kr

Tabell 2: Avkastning till uppgift 2

Vad blir vår “certainty equivalent” för detta spel, om vi antar att vi inte har några övriga tillgångar, och att vi har logaritmen som nyttofunktion? Vad blir vår “certainty equivalent” om vi antar att vi förutom avkastningen till spelet har 100kr i andra tillgångar?

Vi antar vidare att det kostar 100kr att finansiera hela projektet, fast det är tillåtet att endast köpa en andel (om vi investerar 10kr och projektet går som bäst, får vi tillbaka 30 och har tjänat 20). Om vi har 100kr hur stor andel av projektet skall vi finansiera, givet att vi fortfarande använder oss av log-nytta?

3. [VaR och CVaR]

Vi antar att vi har tre investeringsmöjligheter, två osäkra samt en säker, betecknade a,b och s. A och b ger avkastning enligt tabell nedan, medan c motsvarar pengar i madrassen, och därför alltid ger en avkastning om 1.

		utfall a			
		0	1	2	3
utfall b	10	0.025	0.05	0.075	0.075
	2	0.05	0.075	0.075	0.075
	1	0.075	0.075	0.075	0.05
	0	0.075	0.075	0.05	0.025

Tabell 3: Avkastning till uppgift 3

Er uppgift är att hitta en lösning vilken ger en avkastning på 1.5 gånger pengarna i snitt.

Under katalogen /users/mdstud/ouo03/upge på labkontona finns filer e.mod samt e.dat vilka implementerar metoden från [Ury00] för dessa utfall. Anväd filerna för att ta fram den lösning som minimerar CVaR-75%, d.v.s den lösning som minimerar väntevärdet av de 25% sämsta lösningarna. Vad blir VaR, CVaR resp varians för denna lösning?

Optimera dessutom samma problem med Markowitz metod för den givna önskade avkastningen. Vilken fördelning vill vi ha på tillgångarna? Vad blir VaR, CVaR och varians för denna lösning? Tag dessutom lösningen från Markowitz metod, och kasta om de mängder som investeras i a respektive b. Om vi tittar på den kulmulativa fördeningen för Markowitzlösningen och den omkastade Markowits-lösningen borde vi kunna se stokastisk dominans. Vad innebär detta?