Chalmers tekniska högskola
Matematiska institutionen
Ann-Brith Strömberg & Fredrik Altenstedt

3 september 2003
TMA136/MAM350
Optimering under osäkerhet

Inlämningsuppgifter

Detta kompendium innehåller instruktioner och material för inlämningsuppgifter i kursen Optimering under osäkerhet, höstterminen 2003. Uppgifterna C–E är ej klara vid pressläggningen utan delas ut senare.

Innehåll

A Tidningsbudsproblemet

Ett tidningsbud går varje morgon till tidningsutgivaren och köper x exemplar av dagens tidning till ett pris av c per styck. Det antal han köper har vanligtvis en övre gräns, u, som motsvarar antingen budets säljförmåga eller en gräns som utgivaren har satt för varje tidningsbud. Sedan går tidningsbudet ut och säljer så många tidningar som möjligt för försäljningspriset q, där $q > c$. Alla osålda tidningar kan säljas tillbaka till utgivaren för återköpspriset r, där $r < c$. Det antas att tidningsbudet inte kan återvända till utgivaren under dagen för att köpa fler tidningar, eftersom andra tidningsbud redan har köpt de återstående tidningarna. Han kan inte heller sälja dagens tidning i morgon, eftersom läsarna vill ha färska nyheter.

Hur många exemplar av tidningen skall budet köpa varje morgon? Efterfrågan på tidningar varierar mellan olika dagar och beskrivs av den stokastiska variabeln $\boldsymbol{\xi}$.

För att beskriva budets vinst definierar vi y som försäljningsvolymen och w som det antal tidningar som återköps av utgivaren på kvällen. Vi kan då formulera problemet som

$$\begin{array}{ll} \min & c \cdot x + \mathcal{Q}(x) \\ \text{då} & 0 \leq x \leq u \end{array}$$

där

$$\mathcal{Q}(x) = E_{\boldsymbol{\xi}} Q(x, \boldsymbol{\xi})$$

och

$$\begin{array}{rrcl} Q(x,\boldsymbol{\xi}) = \min & -q \cdot y(\boldsymbol{\xi}) - r \cdot w(\boldsymbol{\xi}) & & \\ \text{då} & y(\boldsymbol{\xi}) & \leq & \boldsymbol{\xi} \\ & y(\boldsymbol{\xi}) + w(\boldsymbol{\xi}) & \leq & x \\ & y(\boldsymbol{\xi}), w(\boldsymbol{\xi}) & \geq & 0 \end{array}$$

och $E_{\boldsymbol{\xi}}$ betecknar väntevärdet med avseende på $\boldsymbol{\xi}$. Här motsvarar $-\mathcal{Q}(x)$ den förväntade vinsten vid försäljning och återköp, medan $-Q(x,\boldsymbol{\xi})$ är vinsten vid försäljning och återköp då efterfrågan är på nivån $\boldsymbol{\xi}$.

Modellen illustrerar två-stegskaraktären hos tidningsbudets problem. Beslutet om hur många tidningar budet skall köpa måste fattas på morgonen, innan han vet dagens efterfrågan. När efterfrågan är känd, i det så kallade andra steget, i slutet av försäljningsperioden för det aktuella numret, kan vinsten beräknas enligt

$$\begin{array}{rcl} y^*(\boldsymbol{\xi}) & = & \min\{\boldsymbol{\xi}, x\}, \\ w^*(\boldsymbol{\xi}) & = & \max\{x - \boldsymbol{\xi}, 0\}. \end{array}$$

Försäljningsvolymen kan aldrig överstiga antalet tillgängliga tidningar och ej heller efterfrågan. Återköp görs endast då efterfrågan är lägre än antalet tillgängliga tidningar. Väntevärdesfunktionen för steg två ges av

$$\mathcal{Q}(x) = E_{\boldsymbol{\xi}}[-q \cdot \min(\boldsymbol{\xi}, x) - r \cdot \max(x - \boldsymbol{\xi}, 0)].$$

Denna funktion är konvex och kontinuerlig eftersom $q > r$. Då $\boldsymbol{\xi}$ är en kontinuerlig stokastisk variabel är $\mathcal{Q}$ också differentierbar. I detta fall ges lösningen till tidningsbudsproblemet av

$$x = \begin{cases} 0 & \text{om} \quad c + \mathcal{Q}'(0) > 0, \\ u & \text{om} \quad c + \mathcal{Q}'(u) < 0, \\ \text{lösningen till } c + \mathcal{Q}'(x) = 0 & \text{annars,} \end{cases}$$

där $\mathcal{Q}'(x)$ betecknar första ordningens derivata av $\mathcal{Q}$ i punkten x.

Funktionsvärdet för $\mathcal{Q}$ i punkten x kan beräknas enligt

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(x) &= \int_{-\infty}^{x} (-q\xi - r(x - \xi))\ dF(\xi) + \int_{x}^{\infty} (-qx)\ dF(\xi) \\ &= -(q - r) \int_{-\infty}^{x} \xi\ dF(\xi) - rxF(x) - qx(1 - F(x)), \end{aligned}$$

där $F(\boldsymbol{\xi})$ betecknar den kumulativa fördelningsfunktionen för $\boldsymbol{\xi}$ och $dF(\xi) = f(\xi)d\xi$. Med hjälp av partiell integration följer att

$$\mathcal{Q}(x) = -qx + (q - r) \int_{-\infty}^{x} F(\xi)\ d\xi,$$

så att

$$\mathcal{Q}'(x) = -q + (q - r)F(x).$$

Lösningen ges därför av

$$x^* = \begin{cases} 0 & \text{om} \quad \frac{q-c}{q-r} < F(0), \\ u & \text{om} \quad \frac{q-c}{q-r} > F(u), \\ F^{-1}(\frac{q-c}{q-r}) & \text{annars,} \end{cases}$$

där $F^{-1}(\alpha)$ är α-kvantilen för F. Om F är kontinuerlig så innebär $x = F^{-1}(\alpha)$ att $\alpha = F(x)$. En rimlig beskrivning av efterfrågan bör implicera $F(0) = 0$, vilket innebär att lösningen aldrig kan vara $x^* = 0$.

Tidningsbudsproblemet är ett exempel på ett stokastiskt optimeringsproblem med "simple recourse".

Uppgift

Antag att $c = 10$, $q = 25$, $r = 5$ och att efterfrågan är likformigt fördelad på intervallet $[50, 150]$. Finn optimallösningen till det modifierade problemet. Finn också lösningen till en motsvarande deterministisk modell med efterfrågan 100. Beräkna (den relativa) differensen mellan värdet av den lösning som erhålls då man tar hänsyn till sannolikhetsfördelningen hos efterfrågan och det värde som får då efterfrågan antas vara deterministisk (100). Skriv en kort redogörelse för vad du kommit fram till och hur.

B Ett exempel från spannmålsodling

En bonde har 500 tunnland att odla vete, majs och sockerbetor på. Kostnaderna för utsäde, räknat i \$/tunnland, är 150, 230 och 260 för vete, majs respektive sockerbetor. Avkastningen för dessa grödor, vilken inte är helt känd i förväg, är stokastiska variabler och betecknas med $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ respektive $\mathbf{a}_3$ ton/tunnland. Bonden behöver för eget bruk 200 ton vete och 240 ton majs och inköpspriserna för dessa efter skörd är 238 respektive 210 \$/ton. Försäljningspriserna efter skörd är 170 och 150 \$/ton för vete respektive majs. Priset för sockerbetor är 36 \$/ton upp till maximalt 6000 ton och 10 \$/ton för det som därutöver säljs. Vi definierar variabler enligt:
x_j = antal tunnland som besås med gröda $j = 1, 2, 3$, där 1=vete, 2=majs, 3=sockerbetor;
y_j = antal ton som köps in av gröda $j = 1, 2$;
w_j = antal ton som säljs av gröda $j = 1, 2, 3, 4$, där 3(4)=sockerbetor, högt(lågt) pris,
och formulerar sedan en optimeringsmodell för att maximera bondens vinst enligt

$$
\begin{array}{rl}
z^* = \max & -150x_1 - 230x_2 - 260x_3 - 238y_1 - 210y_2 + 170w_1 + 150w_2 + 36w_3 + 10w_4, \\
\text{då} & \begin{array}{lllllllll}
x_1 + x_2 + x_3 & & & & & & \leq & 500, \\
\mathbf{a}_1 x_1 & & +y_1 & & -w_1 & & \geq & 200, \\
& \mathbf{a}_2 x_2 & & +y_2 & & -w_2 & \geq & 240, \\
& \mathbf{a}_3 x_3 & & & & -w_3 - w_4 & \geq & 0, \\
& & & & & w_3 & \leq & 6000, \\
& & & & & x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, w_1, w_2, w_3, w_4 & \geq & 0.
\end{array}
\end{array}
$$

För att denna modell skall kunna leda till en optimal fördelning av arealen måste bonden före sådden veta hur stor avkastningen kommer att bli.

Antag att 3 olika scenarion kan inträffa, vart och ett med sannolikheten $\frac{1}{3}$. Scenario 1 motsvaras av en avkastning som är 20% under väntevärdet, $a_{\cdot 1} = (2, 2.4, 16)$, scenario 2 av förväntat värde, $a_{\cdot 2} = (2.5, 3, 20)$, och scenario 3 av en avkastning som är 20% över väntevärdet, $a_{\cdot 3} = (3, 3.6, 24)$. Definiera nya variabler enligt:
y_{js} = antal ton av gröda j som köps in vid scenario $s = 1, 2, 3$;
w_{js} = antal ton av gröda j som säljs vid scenario $s = 1, 2, 3$.
Vi kan då formulera följande scenariomodell:

$$
\begin{array}{rl}
\max & -150x_1 - 230x_2 - 260x_3 + \frac{1}{3}\sum_{s=1}^{3}\left(-238y_{1s} - 210y_{2s} + 170w_{1s} + 150w_{2s} + 36w_{3s} + 10w_{4s}\right), \\
\text{då} & \begin{array}{llllllll}
x_1 + x_2 + x_3 & & & & & \leq & 500, & \\
a_{1s}x_1 & +y_{1s} & & -w_{1s} & & \geq & 200, & s = 1, 2, 3, \\
a_{2s}x_2 & & +y_{2s} & & -w_{2s} & \geq & 240, & s = 1, 2, 3, \\
a_{3s}x_3 & & & & -w_{3s} - w_{4s} & \geq & 0, & s = 1, 2, 3, \\
& & & & w_{3s} & \leq & 6000, & s = 1, 2, 3, \\
& & & & x_1, x_2, x_3, y_{1s}, y_{2s}, w_{1s}, w_{2s}, w_{3s}, w_{4s} & \geq & 0, & s = 1, 2, 3.
\end{array}
\end{array}
$$

Det optimala fördelningen av arealen blir $x^* = (170, 80, 250)$. Beroende på vilket scenario som sedan inträffar kommer bonden att köpa in och sälja olika mängder enligt:

$$
[y^*_{\cdot 1}, y^*_{\cdot 2}, y^*_{\cdot 3}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 48 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ och } [w^*_{\cdot 1}, w^*_{\cdot 2}, w^*_{\cdot 3}] = \begin{bmatrix} 140 & 225 & 310 \\ 0 & 0 & 48 \\ 4000 & 5000 & 6000 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
$$

Vinsten blir vid olika scenarion: $z_1^* = \$48,820$, $z_2^* = \$109,350$ samt $z_3^* = \$167,000$. Den genomsnittliga vinsten per år, under många år, blir med scenariemodellen $\$108,390$.

Uppgifter

Följande övningar utgår alla från grundvarianten av odlingsexemplet. För varje uppgift skall du göra några förändringar i den ursprungliga matematiska modellen och lösa det nya stokastiska optimeringsproblemet med hjälp av någon standardprogramvara för lösning av linjära (heltals-)optimeringsproblem (AMPL & Cplex). Skriv en kort rapport om vad du kommit fram till.

1. [Värdet av den stokastiska lösningen (VSS)]

   Antag att bonden använder sin mark enligt den lösning som baseras på att avkastningen är den förväntade, d.v.s., 120 tunnland vete, 80 tunnland majs och 300 tunnland sockerbetor. Visa att om avkastningen är stokastisk (20% över, lika med och 20% under förväntat värde, med sannolikheten en tredjedel vardera) så blir den förväntade årliga vinsten $\$107,240$. Observera att kostnaden för sådd är känd i förväg men att den mängd gröda som säljs/köps in efter skörd beror av avkastningen, som är osäker. Gör en tabell över hur mycket av de olika grödorna som skördas, köps in och säljs under tre olika scenarion, då steg ett–lösningen $x = (120, 80, 300)$ enligt ovan används.

2. [Priseffekt]

   När avkastningen är god för en bonde så är den vanligtvis god för många andra bönder också. Tillgången ökar alltså, vilket medför sjunkande inköps- och försäljningspriser för bönderna. Antag att priserna på majs och vete blir 10% lägre än ordinarie priser då avkastningen är 20% högre än förväntat och att de blir 10% högre då avkastningen är 20% lägre än förväntat. Formulera en modell där dessa prisförändringar påverkar både inköp och försäljning och majs och vete. Antag att priset på sockerbetor inte påverkas av avkastningen. Lös optimeringsproblemet samt beräkna även det förväntade värdet av perfekt information (EVPI) och värdet av den stokastiska lösningen (VSS).

3. [Binärt första steg]

   Antag att bonden har fyra åkrar med arealerna 185, 145, 105 respektive 65 tunnland. Notera att totala arealen om 500 tunnland är oförändrad. Eftersom detta hände innan det laga skiftet ägde rum är dessa åkrar belägna i olika delar av byn. För att effektivisera sitt arbete vill bonden därför odla endast en typ av gröda på varje åker. Formulera denna modell som ett två–stegs stokastiskt optimeringsproblem där steg 1–problemet har binära variabler. Finn en lösning till optimeringsproblemet, beräkna det förväntade värdet av perfekt information (EVPI) och värdet av den stokastiska lösningen (VSS).

4. [Riskobenägenhet]

   Enligt ekonomisk teori är en bonde vanligen, i likhet med de flesta andra, obenägen att ta risker. Det finns olika sätt att modellera riskobenägenhet. En simpelt sätt är att planera för det värsta som kan hända. Mer precist handlar det då om att maximera vinsten under förutsättning att det värsta möjliga scenariot inträffar.

Notera att för vissa modeller kan man inte i förväg veta vilket scenario som kommer att ge den lägsta vinsten. I odlingsexemplet motsvaras den sämsta tänkbara situationen av scenario 3 (avkastningen 20% under förväntat värde). Att planera för det värsta som kan hända innebär då att lösningen 100 tunnland vete, 25 tunnland majs och 375 tunnland sockerbetor är optimal, med en årlig vinst om lägst $\$59,950$.

(a) Beräkna minskningen av förväntad vinst om denna lösning väljs jämfört med då lösningen från den stokastiska modellen används.

(b) Ett vettigt angreppssätt kan vara att kräva en minimivinst även om det värsta möjliga scenariot inträffar (man försäkrar sig under varje enskilt år mot en alltför liten vinst eller stor förlust). Finn en lösning som maximerar den förväntade vinsten under förutsättning att då det sämsta scenariot inträffar får det årets vinst inte understiga $\$58,000$. Hur mycket mindre blir den förväntade vinsten?

(c) Upprepa uppgift 4b för andra nivåer på accepterad minimal vinst: $\$56,000$, $\$54,000$, $\$52,000$, $\$50,000$ respektive $\$48,000$. Gör en graf över förväntad minskning av vinsten.

(d) Jämför variabelvärdena med dem som erhålls då vi *inte* kräver en lägsta vinst. Jämför också med det beslut som erhålls då vi utgår från att det sämsta scenariot inträffar (deterministisk modell) och att inget krav finns på lägsta vinst.