Fredrik Altenstedt 2003–09–24

TMA135/MAN350 Optimering under osäkerhet Inlämningsuppgifter

L-shaped decompositon

I denna uppgift skall ni köra “L-shaped decomposition” på en enklare variant av bondproblemet från uppgift B. Tanken är att ni skall förstå bättre hur metoden fungerar genom att köra den “för hand”. Problemet från uppgift B har modifierats genom att ta bort betorna. Det kvarvarande problemet ser då ut som (omgjort till min-problem):

$$
\begin{array}{lllll}
\min & 150x_1 + 230x_2 + \frac{1}{3}\sum_{s=1}^{3}\left(238y_{1s} + 210y_{2s} - 170w_{1s} - 150w_{2s}\right), & & & \\
\text{då} & x_1 + x_2 & \leq & 500, & \\
 & a_{1s}x_1 + y_{1s} - w_{1s} & \geq & 200, & s = 1,2,3, \\
 & a_{2s}x_2 + y_{2s} - w_{2s} & \geq & 240, & s = 1,2,3, \\
 & x_1, x_2, y_{1s}, y_{2s}, w_{1s}, w_{2s}, & \geq & 0, & s = 1,2,3.
\end{array}
$$

Vi delar nu upp detta problem i ett masterproblem och 3 sub-problem. Masterproblemet talar om vad vi gör i steg 1 och ser ut som:

$$
\begin{array}{rlll}
\min & 150x_1 + 230x_2 + \theta & & \\
\text{då} & x_1 + x_2 \leq & 500, & \\
 & e_i + d_{1i}(x_1 - \bar{x}_{1i}) + d_{2i}(x_2 - \bar{x}_{2i}) \leq & \theta, & i \in 1..k.
\end{array}
$$

I denna formulering kommer θ att vara vår modell av recource-funktionen $\mathcal{Q}(x)$ och antalet snitt ges av k. Om vi ej har några snitt måste θ fixeras till 0 (görs men `fix theta;` i AMPL).

Dessutom får vi ett subproblem per scenario, vilka ges av

$$
\begin{array}{rrcl}
\min & Q_s(x_1, x_2) = 238y_{1s} + 210y_{2s} - 170w_{1s} - 150w_{2s} & & \\
\text{då} & a_{1s}x_1 + y_{1s} - w_{1s} & \geq & 200, \\
 & a_{2s}x_2 + y_{2s} - w_{2s} & \geq & 240, \\
 & y_{1s}, y_{2s}, w_{1s}, w_{2s} & \geq & 0.
\end{array}
$$

För att förenkla körandet av algoritmen skriver vi dock om detta till det ekvivalenta problemet:

$$
\begin{array}{rrcll}
\min & Q_s(x_1, x_2) = 238y_{1s} + 210y_{2s} - 170w_{1s} - 150w_{2s} & & & \\
\text{då} & (200 - y_{1s} + w_{1s})/a_{1s} & \leq & x_1, & (1) \\
 & (240 - y_{2s} + w_{2s})/a_{2s} & \leq & x_2, & (2) \\
 & y_{1s}, y_{2s}, w_{1s}, w_{2s} & \geq & 0 &
\end{array}
$$

Observera att i detta problem är x_1 och x_2 ej variabler, utan fixa parametrar givna av optimallösningen i master-problemet.

Vi kan nu lösa hela problemet genom att omväxlande lösa master och sub-problem. Vi börjar med att lösa masterproblemet. Detta ger oss ett värden på x_1, x_2 vilka vi kan sätta in i de tre sub-problemen.

Löser vi nu det första sub-problemet får vi reda på hur mycket vi tjänar/förlorar i steg 2 *om vi använder den steg-1 lösning som vi fick från master-problemet.* Vidare, genom att titta på dual-variablerna π_{1s}, π_{2s} för bivillkor (1)–(2) får vi reda på hur mycket värdet på steg-2 lösningen förändras om vi ändrar högerledet i bivillkoren. Men högerleden för bivillkoren är exakt lösningen från masterproblemet (detta är anledningen till omformuleringen), varför vi får reda på hur mycket värdet för steg-2 lösningen ändras om vi ändrar steg-1 lösningen. Då värdet för ett linjärt minimerings-problem är en konvex funktion av högerledet, vet vi därmed att

$$Q_s(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \geq Q_s(x_1, x_2) + \pi_{1s}(\tilde{x}_1 - x_1) + \pi_{2s}(\tilde{x}_2 - x_2)$$

Då vi vet att recource-funktionen ges av

$$\mathcal{Q}(x_1, x_2) = \sum_{s=1}^{3} \frac{1}{3} Q_s(x_1, x_2)$$

får vi att

$$\mathcal{Q}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \geq \sum_{s=1}^{3} \frac{1}{3} Q_s(x_1, x_2) + \pi_{1s}(\tilde{x}_1 - x_1) + \pi_{2s}(\tilde{x}_2 - x_2)$$

varför vi kan använda den duala lösningen från våra steg-2 problem till att konstruera ett snitt.

$$e_i + d_{1i}(x_1 - \bar{x}_{1i}) + d_{2i}(x_2 - \bar{x}_{2i}) \leq \theta$$

Multi-cuts

I algoritmen ovan är θ en modell av $\mathcal{Q}(x_1, x_2)$. Vi kan (möjligen) få bättre prestanda lösandet av modellen genom att bygga upp en modell för varje Q i stället. Om vi gör detta blir master-problemet i stället

$$\begin{array}{lrcll}
\min & 150x_1 + 230x_2 + \sum_{s=1}^{3} \frac{1}{3}\theta_s & & & \\
\text{då} & x_1 + x_2 & \leq & 500, & \\
& e_i + d_{1si}(x_1 - \bar{x}_{1i}) + d_{2si}(x_2 - \bar{x}_{2i}) & \leq & \theta_s & s \in 1..3, i \in 1..k
\end{array}$$

och vi får snitt som

$$\theta_s \geq Q_s(x_1, x_2) + \pi_{1s}(\tilde{x}_1 - x_1) + \pi_{2s}(\tilde{x}_2 - x_2)$$

För att köra denna uppgift behövs filer vilka kan kopieras till ert konto från /user/mdstud/ouo03/upgd. De filer som finns är fb_master.mod, fb_master.dat, fb_sub.mod, fb_sub[1-3].dat samt snitt.dat. Dessa innehåller data för masterproblemet och de tre sub-problemen.

Tips: Om ni vill underlätta körandet av problemen så kan ni använda ett ampl-fönster för varje problem, men se då till att använda studentversionen ampl_stud, ty annars tar licenserna slut. Ni kan lagra data för snitten i filen snitt.dat. Om ni har uppdaterat snitten så kan ni importera dessa till master-problemet genom att skriva `update data; data snitt.dat;`. Genom att skriva update data kan ni skriva över data utan att ampl klagar på att data redan existerar. Duala värdena för bivillkoren ser ni genom att skriva `display Required.dual;`.

Inlämnings/laborationsuppgifter

1. [Enkelsnitt]

   Lös det förenklade farmingproblemet med "single-cut". Genomför minst 4 iterationer (om ni ej hittar optimum innan dess). För varje iteration, ange vad som är den optimala steg-1 lösningen, samt en övre och undre gräns på målfunktionsvärdet på hela problemet. Förklara varifrån ni får den övre och undre gränsen.

2. [Multisnitt] Modifiera filerna för att i stället köra multi-snitt, och genomför uppgifterna ovan. Konvergerar den övre och undre gränsen snabbare eller långsammare jämfört med föregående fall?