Matematiska Institutionen
Chalmers Tekniska Högskola

Lösningar till skrivning i
Matematisk analys för K, del D, (TMA151B), 1999-06-01

1. Låt $f(x) = x\ln(2-x)$

a) Bestäm Taylorpolynomet av grad 2, kring punkten $x = 1$, till $f(x)$ (3 p)

b) Beräkna gränsvärdet $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+x-1}{\cos(1-x^2)-1}$ (3 p)

Lösning: a) Vi har $f(x) = x\ln(2-x)$, $f'(x) = \ln(2-x) - \dfrac{x}{2-x}$ och

$f''(x) = \dfrac{-2}{2-x} - \dfrac{x}{(2-x)^2}$, och speciellt är $f(1) = 0, f'(1) = -1, f''(1) = -3$,

så Taylorpolynomet av grad 2 kring $x = 1$ ges av $p(x) = \underline{-(x-1) - \frac{3}{2}(x-1)^2}$.

$$\left(\begin{array}{l} \text{alternativ lösning : } f(x) = x\ln(2-x) = ((x-1)+1)\ln(1-(x-1)) = \\ = \left\{\begin{array}{l}\text{Sätt } t = x-1 \text{ i Maclaurinutv.}\\ \ln(1+t) = -t - \frac{t^2}{2} + t^3O(1)\end{array}\right\} = ((x-1)+1)\Big(-(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \\ +(x-1)^3O(1)\Big) = \underline{-(x-1) - \frac{3}{2}(x-1)^2} + (x-1)^3O(1) \end{array}\right)$$

b) $$\frac{f(x)+x-1}{\cos(1-x^2)-1} = \left\{\begin{array}{l}\text{utnyttja svaret i a) och Maclaurinutv.}\\ \cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + t^3O(1) \text{ , med } t = 1-x^2\end{array}\right\} =$$
$$= \frac{\frac{-3}{2}(x-1)^2 + (x-1)^3O(1)}{\frac{-1}{2}(1-x^2)^2 + (1-x^2)^3O(1)} = \frac{3 + (x-1)O(1)}{(1+x)^2 + (1-x)O(1)} \to \underline{\frac{3}{4}}\text{ , då } x \to 1$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{alternativ lösning: } \lim_{x\to 1}\frac{f(x)+x-1}{\cos(1-x^2)-1} \overset{\text{l'Hospitals 1:a regel}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{f'(x)+1}{2x\sin(1-x^2)} = \\ \overset{\text{l'Hospitals 1:a regel}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{f''(x)}{2\sin(1-x^2) - 4x^2\cos(1-x^2)} = \frac{-3}{-4} = \underline{\frac{3}{4}} \end{array}\right)$$

---

2. Finn, med hjälp av Laplacetransformering, den funktion y som satisfierar

$y' - y = e^{-x}(\delta(x-1) + \theta(x-1))$ för $x \geq 0$, och $y(x) = 1$ för $x < 0$ (6 p)

Lösning: Vi har $y'(x) \overset{L06}{\supset} sY(s) - y(0-)$ och

$\delta(x-1) + \theta(x-1) \overset{L05\ \&\ L19}{\supset} e^{-s} + e^{-s}\dfrac{1}{s} \overset{L04}{\Rightarrow}$

$e^{-x}(\delta(x-1) + \theta(x-1)) \supset e^{-(s+1)} + e^{-(s+1)}\dfrac{1}{s+1}$,

så Laplacetransformering av båda led i ekvationen ger

$sY(s) - y(0-) - Y(s) = e^{-(s+1)} + e^{-(s+1)}\dfrac{1}{s+1}$.

Sätter vi nu in $y(0-) = 1$ och löser ut $Y(s)$ ur denna ekvation får vi att

$Y(s) = e^{-(s+1)}\left(\dfrac{1}{s-1} + \dfrac{1}{(s-1)(s+1)}\right) + \dfrac{1}{s-1}$.

Partialbråksuppdelning ger $Y(s) = e^{-(s+1)}\left(\dfrac{3/2}{s-1} - \dfrac{1/2}{s+1}\right) + \dfrac{1}{s-1}$,

varpå vi får att $\underline{y(x) = \left(\frac{3}{2}e^{x-2} - \frac{1}{2}e^{-x}\right)\theta(x-1) + e^x}$

ty $\dfrac{3/2}{s-1} - \dfrac{1/2}{s+1} \overset{L14}{\subset} \dfrac{3}{2}e^x - \dfrac{1}{2}e^{-x} \overset{L05}{\Rightarrow} e^{-(s+1)}\left(\dfrac{3/2}{s-1} - \dfrac{1/2}{s+1}\right) =$

$= e^{-1}e^{-s}\left(\dfrac{3/2}{s-1} - \dfrac{1/2}{s+1}\right) \subset e^{-1}\left(\dfrac{3}{2}e^{x-1} - \dfrac{1}{2}e^{-(x-1)}\right)\theta(x-1)$

---

3. Beräkna den generaliserade dubbelintegralen $\iint_D (4x^3y^3 + x^4y)e^{x^2y^3 - x^3y}\,dxdy$, där området D är den del av första kvadranten som ligger mellan kurvorna $x = y^2 + 1$ och $x = y^2 + 2$. Tips: Gör variabelbytet $\begin{cases} u = x^2y \\ v = x - y^2 \end{cases}$ (6 p)

Lösning: Sätt $\begin{cases} u = x^2y \\ v = x - y^2 \end{cases}$. Området $D = \{(x,y) : 1 \le x - y^2 \le 2\ , x > 0, y > 0\}$ i $xy-$planet motsvaras av området $D' = \{(u,v) : 1 \le v \le 2, u > 0\}$ i $uv-$planet.

Vidare har vi att $\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} 2xy & x^2 \\ 1 & -2y \end{vmatrix} = -x(4y^2 + x)$ så

$$\iint_D \underbrace{(4x^3y^3 + x^4y)e^{x^2y^3 - x^3y}}_{\ge 0 \text{ på } D}\,dxdy = \iint_{D'} x^2yx(4y^2 + x)e^{-x^2y(x-y^2)}\frac{dudv}{x(4y^2 + x)} =$$

$$\int_0^\infty \int_1^2 ue^{-uv}dvdu = \int_0^\infty \left[-e^{-uv}\right]_1^2 du = \int_0^\infty \left(e^{-u} - e^{-2u}\right) du =$$

$$= \left[-e^{-u} + \frac{1}{2}e^{-2u}\right]_0^\infty = 1 - \frac{1}{2} = \underline{\frac{1}{2}}$$

---

4. Låt $\mathbf{F} = (2xy^2z, x + z, x^2z^2)$ vara transportvektorn vid strömning av en viss materia och låt E vara halvklotet $x^2 + y^2 + z^2 \le 2,\ z \ge 0$.
Beräkna $\iiint_E \operatorname{div}\mathbf{F}\,dxdydz$, dvs. den massa som per tidsenhet alstras i E. (6 p)

Lösning: Vi har

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(2xy^2z) + \frac{\partial}{\partial y}(x + z) + \frac{\partial}{\partial z}(x^2z^2) = 2y^2z + 0 + 2x^2z = 2z(x^2 + y^2)$$

och byter vi till rymdpolära koordinater, dvs. $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$, så avbildas halvklotet E på området $E' = \{(r,\theta,\phi) : 0 < r < \sqrt{2}, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, 0 < \phi < 2\pi\}$,

så vi får att $\iiint_E \operatorname{div}\mathbf{F}\,dxdydz = \iiint_E 2z(x^2 + y^2)\,dxdydz =$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\sqrt{2}} 2r\cos\theta r^2\sin^2\theta r^2\sin\theta\,drd\theta d\phi = 2\cdot 2\pi\cdot\left[\frac{\sin^4\theta}{4}\right]_0^{\pi/2}\cdot\left[\frac{r^6}{6}\right]_0^{\sqrt{2}} = \underline{\frac{4\pi}{3}}$$

---

5. Beräkna, på två sätt, kurvintegralen $\int_C (1 + xz)e^{xz}dx + zdy + (x^2e^{xz} + y)dz$,
där C är den del av skärningskurvan mellan ytan $xz = 4$ och planet $x + y + z = 4$, som går från punkten $(2, 0, 2)$ till punkten $(4, -1, 1)$.

a) Dels per definition av kurvintegraler, genom att först parametrisera C, (3 p)

b) och dels genom att utnyttja att differentialformen i kurvintegralen är exakt. (3 p)

Lösning: a) Vi kan använda x som parameter i en parameterframställning av kurvan C. Sätter vi $x = t$, så ger ekvationen $xz = 4$ att $z = \frac{4}{t}$, och ur planets ekvation får vi att $y = 4 - x - z = 4 - t - \frac{4}{t}$. Genom att låta t variera från 2 till 4 erhåller vi sedan den del av skärningskurvan som är C, dvs. vi har parameterframställningen

$C : \begin{cases} x = t \\ y = 4 - t - \frac{4}{t} \\ z = \frac{4}{t} \end{cases}$, $2 \xrightarrow{t} 4$, och vi får att

$$\int_C (1 + xz)e^{xz}dx + zdy + (x^2e^{xz} + y)dz =$$

$$= \int_2^4 \left(5e^4 + \frac{4}{t}(-1 + \frac{4}{t^2}) + (t^2e^4 + 4 - t - \frac{4}{t})(\frac{-4}{t^2})\right) dt =$$

$$= \int_2^4 \left(e^4 - \frac{16}{t^2} + \frac{32}{t^3}\right) dt = \left[e^4t + \frac{16}{t} - \frac{16}{t^2}\right]_1^2 = \underline{2e^4 - 1}$$

b) Vi söker en reellvärd funktion $\phi(x,y,z)$ sådant att
$d\phi = (1+xz)e^{xz}dx + zdy + (x^2e^{xz}+y)dz$
(anm. det är givet från uppgiften att ett sådant ϕ finns).
$x^2e^{xz} + y = \phi'_z \Rightarrow \phi = xe^{xz} + yz + g(x,y)$
$z = \phi'_y = z + g'_y \Rightarrow g'_y = 0 \Rightarrow g(x,y) = h(x)$
$(1+xz)e^{xz} = \phi'_x = (1+xz)e^{xz} + h' \Rightarrow h' = 0 \Rightarrow h = C$
En primitiv funktion är således $\phi(x,y,z) = xe^{xz} + yz$ (välj $C = 0$), och vi får

$$\int_C (1+xz)e^{xz}dx + zdy + (x^2e^{xz}+y)dz =$$
$$= \int_C d(xe^{xz}+yz) = [xe^{xz}+yz]_{(2,0,2)}^{(4,-1,1)} = \underline{2e^4-1}.$$

---

6. Låt $\mathbf{Y} = \{(x,y,z) : xyz = 1, x > 0, y > 0, z > 0\}$. Bestäm den punkt P på ytan $\mathbf{Y}$ som ligger närmast punkten $(1,0,-1)$, och hur stort är detta avstånd mellan P och $(1,0,-1)$. (6 p)

Lösning: Vi söker minimum av $f(x,y,z) = (x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2$ under bivillkoren att $xyz = 1$ och $x > 0, y > 0, z > 0$. Geometriskt är det uppenbart att ett sådant minimum existerar, och enligt Rangmetoden gäller att

$$\text{rang}\begin{bmatrix} 2(x-1) & 2y & 2(z+1) \\ yz & xz & xy \end{bmatrix} < 2$$, i en sådan minimipunkt $P = (x,y,z)$.

För positiva x, y och z har vi att

$$\text{rang}\begin{bmatrix} 2(x-1) & 2y & 2(z+1) \\ yz & xz & xy \end{bmatrix} = \text{rang}\begin{bmatrix} x(x-1)z & xyz & xz(z+1) \\ y^2z & xyz & xy^2 \end{bmatrix} < 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1)z = y^2z \\ xz(z+1) = xy^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1) = y^2 \\ z(z+1) = y^2 \end{cases}.$$

Tillsammans ger dessa ekvationer

$$(x-\frac{1}{2})^2 = (z+\frac{1}{2})^2 \quad \left(= y^2 + \frac{1}{4}\right) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2} \pm \left(z+\frac{1}{2}\right).$$

Lösningen $x = -z$ kan här uteslutas, ty $x > 0$ och $z > 0$, så vi måste ha $x = z+1$. Detta villkor, tillsammans med villkoret $y^2 = z(z+1)$ och bivillkoret $xyz = 1$, ger nu

$$1 = (xyz)^2 = (z+1)^2z(z+1)z^2 = (z(z+1))^3 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad z(z+1) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

Men $z > 0$, så $z = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, vilket ger

$$x = z+1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ och } y = \frac{1}{xz} = 1$$

Således är $\underline{P = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, 1, \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)}$ den punkt på ytan Y som ligger närmast punkten $(1,0,-1)$, och avståndet dem emellan är

$$|P-(1,0,-1)| = \sqrt{\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \underline{2}$$

---

7. Kraftfältet $\mathbf{F} = (2-x^2-y^2)(-y,x)$ har kraftlinjer som är slutna kurvor. Beräkna det arbete som detta kraftfält uträttar då en partikel förflyttar sig utefter kraftlinjen genom $(1,0)$ i positiv led. Visa också att detta arbete är större än arbetet längs varje annan sluten kurva i planet, som inte skär sig själv och har positiv orientering. (6 p)

Lösning: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(2-x^2-y^2)x}{(2-x^2-y^2)(-y)} = \dfrac{x}{-y} \quad \Leftrightarrow \quad ydy = -xdx \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{y^2}{2} = \dfrac{-x^2}{2} + C.$

Med $(x,y) = (1,0)$ insatt får vi $C = \dfrac{1}{2}$, så kraftlinjen genom $(1,0)$ är den slutna kurvan $x^2+y^2 = 1$.

Om C betecknar denna kurva med positiv orientering, så har vi att
Arbetet längs $C = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \int_C -ydx + xdy =$

$$= \left[C : \left\{ \begin{array}{l} x = \cos t \\ y = \sin t \end{array} \right. , \quad 0 \xrightarrow{t} 2\pi \right] = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = \underline{2\pi}$$

Om L är en sluten kurva i planet, som inte skär sig själv och har positiv orientering, och som omsluter ett område D, så ger Greens formel
Arbetet längs $L = \int_L \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} =$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} \left((2 - x^2 - y^2)x\right) - \frac{\partial}{\partial y} \left((2 - x^2 - y^2)(-y)\right) \right) dxdy =$$

$$= 4 \iint_D \left(1 - x^2 - y^2\right) dxdy.$$

Denna dubbelintegral blir maximal om $D : x^2 + y^2 \leq 1$,
vilket betyder att arbetet är maximalt om $L = C$.

---

8. a) Formulera Rangmetoden eller Lagrange multiplikatormetod (välj själv!). (2 p)

b) Vad säger entydighetssatsen för Taylorutvecklingar. (2 p)

c) Visa, från definitionen av Laplacetransformen, följande två transformpar

i) $f(t - T)\theta(t - T) \supset e^{-Ts}F(s)$, då $T \geq 0$ ii) $\cos bt \supset \dfrac{s}{s^2 + b^2}$ (4 p)

Lösning:

a) se kursbok, del 3, sid. 2:49 eller 2:53.
b) se kursbok, del 2, sid. 11:14
c) se kursbok, del 2, sid. 15:09
d) se kursbok, del 2, sid. 15:08