MATEMATIK, Chalmers Tekniska Högskola
Tentamen i Matematik K, del D (TMA151) 1998-08-28, kl 8.45-12.45.
Hjälpmedel: Bifogat formelblad, ej räknedosa.
Telefonvakt:

1. Beräkna
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(ax)+x-\sin(bx)}{x\ln(1+x)}$$
där a och b är godtyckliga reella tal.

2. Beräkna
$$\iint_{\mathbb{R}^2} x^2 e^{-x^2-y^2}\,dxdy.$$

3. (a) Beräkna Laplacetransformen av $f(t) = e^{2t}\sin 3(t-\pi)\cdot\Theta(t-\pi)$.
   (b) Bestäm en funktion som har Laplacetransform
$$F(s) = \frac{4s^3+8s^2+9s+10}{s^4+2s^3+5s^2}.$$

4. Beräkna
$$\int_\gamma e^x\,dx + xy\,dy,$$
där γ följer enhetscirkeln moturs med startpunkt i $(1,0)$ och slutpunkt i $(0,1)$.

5. Beräkna
$$\int_\gamma \frac{y}{x^2+y^2}dx - \frac{x}{x^2+y^2}dy,$$
där γ är en cirkel med centrum i origo och radien R genomlupen 1 varv **medurs**.

6. (a) Visa att vektorfältet
$$\mathbf{F} = \Big(2xe^{4yz^2}, 4x^2z^2e^{4yz^2} + \sin(y+z) + y\cos(y+z), 8x^2yze^{4yz^2} + y\cos(y+z)\Big)$$
   är rotationsfritt och bestäm en potential.
   (b) Beräkna
$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r},$$
   där γ är kurvan som parametriseras av $x = t,\ y = \sin t$ och $z = \cos t$ där t löper från 0 till 2π.

7. Låt K vara en rät cirkulär kon. Mantelarean för konen ges av $M(K) = \pi r s$, där r är radien i basytan och s är sidans längd, dvs. avståndet från toppen till basytans periferi. Volymen av K ges (som bekant) av $V(K) = \pi r^2 h/3$, där h är höjden i konen. Beräkna den minimala mantelarean som en rät cirkulär kon med volymen 1 kan ha.

8. (a) Formulera Greens formel. Var noga med att ange vilka förutsättningar som måste vara uppfyllda för att den ska gälla. (Inget bevis behövs.)
   (b) Bevisa dämpningssatsen för Laplacetransformer, dvs. att om $f(t)$ har Laplacetransformen $F(s)$ så har $e^{-at}f(t)$ Laplacetransformen $F(s+a)$.
   (c) Definiera begreppet fältlinje till ett vektorfält.

LYCKA TILL! /Stefan.