MATEMATIK, Chalmers tekniska högskola
Tentamen i **Matematik K, del D** (TMA151) 2000-05-27, kl 14.15–18.15.
Hjälpmedel: Baksidans formelblad, ej räknedosa.
Telefonvakt: Magnus Wängefors 0740 - 45 90 22

---

1. Beräkna
$$\iiint_E \sin(\frac{\pi}{2}z)\,dx\,dy\,dz,$$
där $E = \{(x,y,z) : 0 < x^2+y^2 < 1,\ \ 0 < z < 1\}$. (6 p)

2. Hitta en potential till gradientfältet $\mathbf{F} = (z^2 - 2xe^{x^2+y^2}, -2ye^{x^2+y^2} - z^3, 2zx - 3z^2y)$. (6 p)

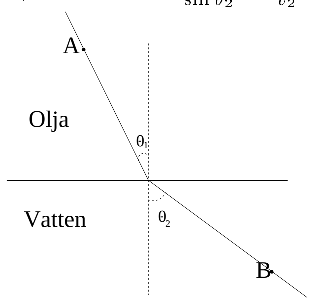
3. a) MacLaurinutveckla $f(x) = \arctan(\ln(\cos(x)))$ så att om $R(x)$ är feltermen så gäller $\lim_{x\to 0}\frac{R(x)}{x^3} = 0$.
b) Beräkna gränsvärdet (3+3 p)
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+\frac{x^2}{2}}{\sin x - x}.$$

4. Låt
$$\Omega = \{(x,y) : 1 \le x \le 2,\ \ e^x \le y \le e^{x^3}\}$$
Beräkna följande kurvintergral, tagen på randen till Ω genomlöpt ett varv moturs. (6 p)
$$\oint_{\partial\Omega} x\ln y\,dx.$$

5. Beräkna massan av en spiralfjäder som beskrivs på följande parameterform $\mathbf{r}(t) = (4\cos t, 4\sin t, 3t)$, där $0 < t < 6\pi$ och som har en längddensitet som är $|\mathbf{r}(t)|^2$. (6 p)

6. Lös följande differentialekvation. (6 p)
$$y^{(3)}(t) - y(t) = \delta(t-1),\ \text{för } t > 0 \quad \text{och } y(t) = \frac{t^2}{2} \text{ för } t < 0.$$

7. I ett avancerat kemiskt experiment passerar en laserstråle genom en bägare där en oljebaserad lösning ligger ovanpå en vattenbaserad lösning. Strålen passerar punkten A i oljeskiktet där ljushastigheten är v_1 och träffar vattenskiktet, där ljushastigheten är v_2, under vinkeln θ_1 från normalen. Strålen går vidare in i det nya mediet under vinkeln θ_2 från normalen till punkten B i vattenlösningen. Laserstrålen tar den snabbaste—inte kortaste—vägen från A till B. Visa att Snells lag gäller, dvs visa att $\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$. (6 p)



8. a) Låt **A** vara ett vektorfält. Ge definitionerna av rotationen och divergensen av **A**.
b) Ge en kort populärvetenskaplig beskrivning av rot**A** och div**A**.
c) Visa att om $\mathbf{F} = \mathrm{rot}\mathbf{A}$ så är $\mathrm{div}\mathbf{F} = 0$. (2+2+4 p)

Lycka till! /TL