MATEMATIK **Chalmers tekniska högskola**

Tentamen i **Matematik K, del D**, (TMA151D).
1999-06-01, kl 14.15-18.15
Hjälpmedel: Baksidans formelsamling.
Telefon: Robert Bohlin, ankn. 5334
OBS! Namn, personnummer, linje och antagningsår skall anges på varje inlämnat blad.

---

1. Låt $f(x) = x \ln(2-x)$

a) Bestäm Taylorpolynomet av grad 2, kring punkten $x = 1$, till $f(x)$ (3 p)

b) Beräkna gränsvärdet $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{f(x) + x - 1}{\cos(1 - x^2) - 1}$ (3 p)

2. Finn, med hjälp av Laplacetransformering, den funktion y som satisfierar
$y' - y = e^{-x}(\delta(x-1) + \theta(x-1))$ för $x \geq 0$, och $y(x) = 1$ för $x < 0$ (6 p)

3. Beräkna den generaliserade dubbelintegralen $\displaystyle\iint_D (4x^3y^3 + x^4y)e^{x^2y^3 - x^3y}\,dxdy$,
där området D är den del av första kvadranten som ligger mellan kurvorna
$x = y^2 + 1$ och $x = y^2 + 2$. Tips: Gör variabelbytet $\begin{cases} u = x^2y \\ v = x - y^2 \end{cases}$ (6 p)

4. Låt $\mathbf{F} = (2xy^2z, x + z, x^2z^2)$ vara transportvektorn vid strömning av en viss materia och låt E vara halvklotet $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2,\ z \geq 0$.
Beräkna $\displaystyle\iiint_E \operatorname{div}\mathbf{F}\,dxdydz$, dvs. den massa som per tidsenhet alstras i E. (6 p)

5. Beräkna, på två sätt, kurvintegralen $\displaystyle\int_C (1 + xz)e^{xz}dx + zdy + (x^2e^{xz} + y)dz$,
där C är den del av skärningskurvan mellan ytan $xz = 4$ och planet $x + y + z = 4$, som går från punkten $(2, 0, 2)$ till punkten $(4, -1, 1)$.

a) Dels per definition av kurvintegraler, genom att först parametrisera C, (3 p)

b) och dels genom att utnyttja att differentialformen i kurvintegralen är exakt. (3 p)

6. Låt $\mathbf{Y} = \{(x, y, z) : xyz = 1, x > 0, y > 0, z > 0\}$. Bestäm den punkt P på ytan $\mathbf{Y}$ som ligger närmast punkten $(1, 0, -1)$, och hur stort är detta avstånd mellan P och $(1, 0, -1)$. (6 p)

7. Kraftfältet $\mathbf{F} = (2 - x^2 - y^2)(-y, x)$ har kraftlinjer som är slutna kurvor. Beräkna det arbete som detta kraftfält uträttar då en partikel förflyttar sig utefter kraftlinjen genom $(1, 0)$ i positiv led. Visa också att detta arbete är större än arbetet längs varje annan sluten kurva i planet, som inte skär sig själv och har positiv orientering. (6 p)

8. a) Formulera Rangmetoden eller Lagrange multiplikatormetod (välj själv!). (2 p)

b) Vad säger entydighetssatsen för Taylorutvecklingar. (2 p)

c) Visa, från definitionen av Laplacetransformen, följande två transformpar

i) $f(t-T)\theta(t-T) \supset e^{-Ts}F(s)$, då $T \geq 0$ ii) $\cos bt \supset \dfrac{s}{s^2 + b^2}$ (4 p)

LYCKA TILL! UTH

Tabell för Laplacetransformation ($f(t) \supset F(s)$)

	$f(t)$	$F(s)$
L03	$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
L04	$e^{-at} f(t)$	$F(s+a)$
L05	$f(t-\mathrm{T})\theta(t-\mathrm{T}) \quad , \; (\mathrm{T} \geq 0)$	$e^{-Ts}F(s)$
L06	$f'(t)$	$sF(s) - f(0-)$
L07	$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0-)$
L08	$\int_{0-}^{t} f(\tau)d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$
L09	$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$	$F(s)G(s)$
L10	$\delta(t)$	1
L11	$\delta^{(n)}(t)$	s^n
L12	1	$\frac{1}{s}$
L13	$\frac{t^n}{n!}$	s^{-n-1}
L14	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
L15	$\cos bt$	$\frac{s}{s^2+b^2}$
L16	$\sin bt$	$\frac{b}{s^2+b^2}$
L17	$\frac{t}{2b}\sin bt$	$\frac{s}{(s^2+b^2)^2}$
L18	$\frac{1}{2b^3}(\sin bt - bt\cos bt)$	$\frac{1}{(s^2+b^2)^2}$
L19	$\delta(t-\mathrm{T})$	$e^{-Ts} \quad , \; (\mathrm{T} \geq 0)$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{\cos\theta x}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}\frac{\cos\theta x}{(2n+2)!}x^{2n+2}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}x^{n+1}$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{(-1)^n}{(2n+1)(1+\theta^2x^2)}x^{2n+1}$$

$$(1+x)^p = 1 + \binom{p}{1}x + \binom{p}{2}x^2 + \binom{p}{3}x^3 + \ldots + \binom{p}{n}x^n + \binom{p}{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1-p}}$$

$$\text{där} \quad \binom{p}{k} = \frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-k+1)}{k(k-1)(k-2)\ldots 1}$$

I samtliga fall är θ ett tal mellan 0 och 1 som beror av x och n.