MATEMATIK, Chalmers Tekniska Högskola
Tentamen i Matematik K, del D (TMA151) 1998-08-28.

Lösningar:

1. Maclaurinutveckling ger
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(ax)+x-\sin(bx)}{x\ln(1+x)}=\frac{(1-b)x+\frac{a^2}{2}x^2+O(x^3)}{x^2+O(x^3)}\ ,$$
från vilken vi drar slutsatsen att gränsvärde saknas om $b\neq 1$ och om $b=1$ så är gränsvärdet $\frac{a^2}{2}$.

2. Övergång till polära koordinater ger
$$I=\iint_{\mathbb{R}^2} x^2 e^{-x^2-y^2}dxdy=\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt\int_0^{\infty} r^3 e^{-r^2}\,dr.$$
Vi har att $\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt=\pi$ (utnyttja t.ex. formeln för dubbla vinkeln) och om vi dessutom gör substitutionen $t=r^2$ så får vi
$$I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\infty} te^{-t}\,dt=\frac{\pi}{2}\left[-te^{-t}-e^{-t}\right]_0^{\infty}=\frac{\pi}{2}\ .$$

3. (a) Genom att använda L16, L05 och L04 så får vi successivt:
$$L(\sin 3t)=\frac{3}{s^2+9}\ ,$$
$$L\left(\sin 3(t-\pi)\cdot\Theta(t-\pi)\right)=e^{-\pi s}\frac{3}{s^2+9}\ ,$$
$$L\left(e^{2t}\sin 3(t-\pi)\cdot\Theta(t-\pi)\right)=e^{-\pi(s-2)}\frac{3}{(s-2)^2+9}\ .$$
(b) Faktorisering av nämnaren ger $s^4+2s^3+5s^2=s^2((s+1)^2+4)$ så vi söker en partialbråksuppdelning på formen
$$Y(s)=\frac{A}{s^2}+\frac{B}{s}+\frac{Cs+D}{(s+1)^2+4}\ .$$
Identifiering av koefficienter ger
$$Y(s)=\frac{2}{s^2}+\frac{1}{s}+\frac{3s+4}{(s+1)^2+4}\ .$$
Från L15 respektive L16 och L04 får vi att $L(e^{-t}\cos 2t)=\frac{s+1}{(s+1)^2+4}$ samt $L(e^{-t}\sin 2t)=\frac{2}{(s+1)^2+4}$. Detta tillsammans med L13 ger att
$$y(t)=1+2t+e^{-t}\left(3\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)$$
har Laplacetransformen $Y(s)$.

4. Vi parametriserar kurvan genom $x = t$ och $y = \sqrt{1-t^2}$ med $1 \xrightarrow{t} 0$. Det ger $dx = dt$ och $dy = -\frac{t\,dt}{\sqrt{1-t^2}}$ och vi får

$$\int_\gamma e^x\,dx + xy\,dy = \int_1^0 e^t - t^2\,dt = \frac{4}{3} - e.$$

5. Vi observerar att $x^2 + y^2 = R^2$ överallt på γ, så vi får att

$$\int_\gamma \frac{y}{x^2+y^2}dx - \frac{x}{x^2+y^2}dy = \frac{1}{R^2}\int_\gamma y\,dx - x\,dy.$$

Vi kan nu tillämpa Greens formel, vilket ger (observera att vi har negativ orientering)

$$\frac{1}{R^2}\int_\gamma y\,dx - x\,dy = -\frac{1}{R^2}\iint_D -2\,dxdy = 2\pi,$$

där D är området inuti γ. Observera att man inte kan tillämpa Greens formel direkt, eftersom $\frac{y}{x^2+y^2}$ och $-\frac{x}{x^2+y^2}$ ej är $\mathcal{C}^1$ överallt i D.

6. (a) Vi bestämmer en potential och om en sådan existerar så visar det också att fältet är rotationsfritt. En potential ϕ ska uppfylla:

$$\begin{aligned}
\phi'_x &= 2xe^{4yz^2},\\
\phi'_y &= 4x^2z^2e^{4yz^2} + \sin(y+z) + y\cos(y+z),\\
\phi'_z &= 8x^2yze^{4yz^2} + y\cos(y+z).
\end{aligned}$$

Det första villkoret ger

$$\phi = x^2e^{4yz^2} + f(y,z).$$

Insatt i det tredje villkoret får vi

$$8x^2yze^{4yz^2} + y\cos(y+z) = 8x^2yze^{4yz^2} + f'_z(y,z),$$

vilket är ekvivalent med $f'_z(y,z) = y\cos(y+z)$. Integration m.a.p. z ger $f(y,z) = y\sin(y+z) + g(y)$. Detta insatt i det andra villkoret ger

$$\begin{aligned}
&4x^2z^2e^{4yz^2} + \sin(y+z) + y\cos(y+z)\\
&\qquad = 4x^2z^2e^{4yz^2} + \sin(y+z) + y\cos(y+z) + g'(z),
\end{aligned}$$

så $g(z)$ är en konstant. En potential för fältet är alltså t.ex.

$$\phi = x^2e^{4yz^2} + y\sin(y+z).$$

(b) Värdet på kurvintegralen ges av $\phi(\mathit{slutpunkt}) - \phi(\mathit{startpunkt})$ och eftersom $t = 0$ ger $(0,0,1)$ och $t = 2\pi$ ger $(2\pi,0,1)$ så får vi

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \phi(2\pi,0,1) - \phi(0,0,1) = 4\pi^2.$$

7. Vi har att r, s, h är längderna av sidorna i en rätvinklig triangel och Pythagoras sats ger $s = \sqrt{r^2 + h^2}$. Det gäller alltså att bestämma minsta värdet av

$$M(K) = M(r, h) = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$$

under bivillkoret

$$V(K) = V(r, h) = \frac{\pi r^2 h}{3} = 1.$$

Man kan lösa ut h ur bivillkoret och får då $h = \frac{3}{\pi r^2}$. Insatt i $M(r, h)$ ger det

$$g(r) = M\left(r, \frac{3}{\pi r^2}\right) = \pi \sqrt{r^4 + \frac{9}{\pi^2 r^2}}\ .$$

Från detta ser vi att $g(r) \longrightarrow \infty$ då $r \longrightarrow 0$ och $r \longrightarrow \infty$, vilket ger att minimum existerar. Vi skulle nu kunna derivera $g(r)$ m.a.p r, men rangmetoden ger enklare räkningar. I en punkt med minimum gäller att

$$\frac{D(M, V)}{D(r, h)} = 0,$$

dvs. att

$$0 = \begin{vmatrix} \pi\sqrt{r^2 + h^2} + \frac{\pi r^2}{\sqrt{r^2+h^2}} & \frac{\pi r h}{\sqrt{r^2+h^2}} \\ \frac{2\pi r h}{3} & \frac{\pi r^2}{3} \end{vmatrix} = \frac{\pi^2 r^2}{3\sqrt{r^2 + h^2}} \begin{vmatrix} 2r^2 + h^2 & h \\ 2h & 1 \end{vmatrix}\ .$$

Eftersom $r > 0$ är detta ekvivalent med att $0 = 2r^2 + h^2 - 2h^2 = 2r^2 - h^2$, dvs. $r = \frac{1}{\sqrt{2}}h$. Detta insatt i bivillkoret ger $1 = \frac{\pi h^3}{6}$ så $h = \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}$ och därmed $r = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}$. Slutligen så får vi att den minimala mantelarean är

$$M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}, \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}\right) = \frac{3\sqrt[3]{\pi}}{\sqrt[6]{6}}\ .$$