MATEMATIK, Chalmers tekniska högskola
Lösningar till tentamen i **Matematik K, del D** (TMA151) 2000-05-27.

1. Vi har att $E = \{(x, y, z) : 0 < x^2 + y^2 < 1, \;\; 0 < z < 1\}$. Dvs E är en cylinder.

$$I = \iiint_E \sin(\frac{\pi}{2}z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \sin(\frac{\pi}{2}z)dz \iint_D dx\,dy,$$

där D är enhetsskivan $\{0 < x^2 + y^2 < 1\}$. D har arean π. Därför är

$$I = \pi \int_0^1 \sin(\frac{\pi}{2}z)dz = \pi \left[-\frac{2}{\pi}\cos(\frac{\pi}{2}z)\right]_0^1 = 2.$$

2. Låt oss kalla den sökta potentialen för $\varphi(x, y, z)$. Vi vill alltså hitta en sådan skalärfunktion så att

$$\text{grad}\varphi = \mathbf{F} = (z^2 - 2xe^{x^2+y^2}, -2ye^{x^2+y^2} - z^3, 2zx - 3z^2y).$$

Vi har att $\varphi_x = z^2 - 2xe^{x^2+y^2}$, vilket ger att $\varphi = z^2x - e^{x^2+y^2} + g(y, z)$. Partiell derivering med avseende på y ger $\varphi_y = -2ye^{x^2+y^2} + g_y(y, z)$. Jämförelse med andra komponenten i $\mathbf{F}$ ger att $g_y(y, z) = -z^3$. Därför måste $g(y, z) = -z^3y + h(z)$. Derivering med avseende på z och jämförelse med $\mathbf{F}$ ger tillslut att $h'(z) = 0$. Vi har då att h är konstant och vi kan till exempel välja den konstanten till 0. Detta ger oss tillslut att en potential till $\mathbf{F}$ kan skrivas som

$$\varphi(x, y, z) = z^2x - e^{x^2+y^2} - z^3y.$$

3. a) Villkoret $\lim_{x\to 0} \frac{R(x)}{x^3} = 0$ betyder att $R(x) = x^3 o(1)$. Vi använder oss av tabellen och utvecklar på, innifrån och ut, tills felet är $x^3 o(1)$.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^3 o(1), \;\; \text{detta insatt i utvecklingen för } \ln(1 + x) \text{ ger då}$$

$$\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} + x^3 o(1) \text{ vilket slutligen ger oss}$$

$$\arctan(\ln(\cos x)) = -\frac{x^2}{2} + x^3 o(1).$$

b) Från a) och Maclaurinutveckling av $\sin x$ har vi att

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) + \frac{x^2}{2}}{\sin x - x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^2}{2} + x^3 o(1) + \frac{x^2}{2}}{x - \frac{x^3}{3!} + x^4 o(1) - x} = \lim_{x\to 0} \frac{o(1)}{\frac{1}{3!} + x^3 o(1)} = 0.$$

4. Greens formel ger att

$$\oint_{\partial\Omega} x \ln y\,dx = \iint_\Omega -\frac{\partial}{\partial y} x \ln y\,dx\,dy = \iint_\Omega -\frac{x}{y}\,dx\,dy = -\int_1^2 x \int_{e^x}^{e^{x^3}} \frac{1}{y}\,dy\,dx =$$

$$= -\int_1^2 x(x^3 - x)\,dx = \ldots = \frac{-58}{15}.$$

5. Fjäderns massa ges av följande integral.

$$\int_{t=0}^{6\pi} \text{“densiteten”}\,ds.$$

Densiteten är $|\mathbf{r}(t)|^2$, där $\mathbf{r}(t) = (4\cos t, 4\sin t, 3t)$. Detta ger oss att vi kan skriva densiteten som

$$|\mathbf{r}(t)|^2 = (4^2(\cos^2 t + \sin^2 t) + 3^2t^2) = (16 + 9t^2).$$

Båglängdselementet, ds, får en ännu finare form.

$$ds = \sqrt{\dot{r}_x^2 + \dot{r}_y^2 + \dot{r}_z^2} = \sqrt{4^2(\cos^2 t + \sin^2 t) + 3^2}\, dt = \sqrt{16+9}\, dt = 5\, dt.$$

Vi kan nu beräkna fjäderns massa:

$$\int_0^{6\pi} (16 + 9t^2) 5\, dt = 5 \int_0^{6\pi} 16 + 9t^2\, dt = 5 \Big[16t + 3t^3 \Big]_0^{6\pi} = 30\pi(16 + 108\pi^2) \text{ massenheter.}$$

6. Villkoret $y(t) = \frac{t^2}{2}$ för $t < 0$, ger att $y(0^-) = y'(0^-) = 0$ och $y''(0^-) = 1$. Vi kan nu Laplacetransformera båda leden med hjälp av L07 och L19 i tabellen. Detta ger följande algebraiska uttryck.

$$Y(s) = \frac{e^{-s} + 1}{s^3 - 1}. \tag{1}$$

Vi ser direkt att $s = 1$ är en rot till $s^3 - 1 = 0$. Polynomdivision ger då att $s^3 - 1 = (s-1)(s^2 + s + 1)$.

Vi kan nu göra följande ansats för partialbråksuppdelning.

$$\frac{1}{s^3 - 1} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs + C}{s^2 + s + 1}.$$

Detta ger så småningom att $A = \frac{1}{3}, B = -\frac{1}{3}$ och $C = -\frac{2}{3}$. Vi har då att

$$\frac{1}{s^3-1} = \frac{1}{3}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{3}\frac{s+2}{s^2+s+1} = \frac{1}{3}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{3}\frac{(s+\frac{1}{2}) + \frac{3}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{3}\frac{(s+\frac{1}{2})}{(s+\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2}.$$

Med hjälp av L14, L15, L16 och L04, får vi den inversa transformen och döper den till $f(t)$.

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s^3-1}) = \frac{1}{3}e^t - \frac{1}{3}e^{-\frac{1}{2}t}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) - \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t). \tag{2}$$

Vi utnyttjar nu $f(t)$ tillsammans med L05, där $T = 1$, för att få:

$$\mathcal{L}^{-1}(\frac{e^{-s}}{s^3-1}) = f(t-1)\theta(t-1).$$

Vi får då från ekvation (1) att

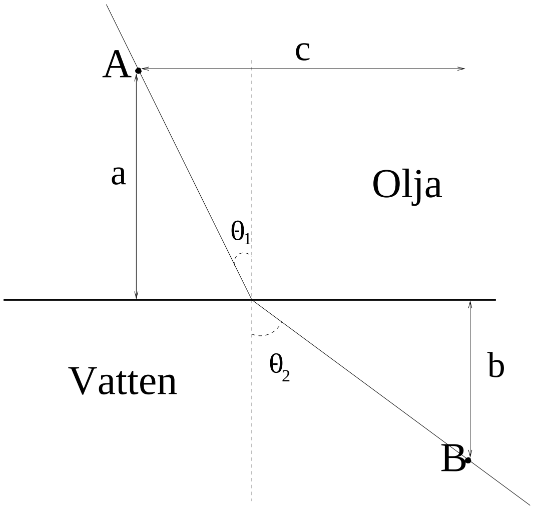
$$y(t) = f(t-1)\theta(t-1) + f(t),$$

för $t > 0$. Vi justerar nu denna lösning med hjälp av stegfunktionen $\theta(t)$ för att få en lösning som också gäller för negativa t.

$$y(t) = f(t-1)\theta(t-1) + f(t)\theta(t) + \frac{t^2}{2}\theta(-t),$$

där $f(t)$ är definerad i (2).

7. Låt a vara det vertikala från A till vattenytan, b avståndet från B till vattenytan och c det horisontella avståndet mellan A och B. Se figur!



Vi har då sambandet att

$$c = a \tan \theta_1 + b \tan \theta_2. \tag{3}$$

Vi vill minimera tiden för laserstrålen att gå mellan A och B. Tiden fås genom följande funktion.

$$f(\theta_1, \theta_2) = \frac{a}{v_1 \cos \theta_1} + \frac{b}{v_2 \cos \theta_2}.$$

Bivillkoret i (3) ger oss

$$u(\theta_1, \theta_2) = a \tan \theta_1 + b \tan \theta_2 - c.$$

Rangmetoden ger oss att

$$\text{Rang } \frac{D(f,u)}{D(\theta_1,\theta_2)} = \text{ Rang } \begin{pmatrix} \frac{a \sin \theta_1}{v_1 \cos^2 \theta_1} & \frac{b \sin \theta_2}{v_2 \cos^2 \theta_2} \\ \frac{a}{\cos^2 \theta_1} & \frac{b}{\cos^2 \theta_2} \end{pmatrix} < 2 \text{ om och endast om } \frac{\sin \theta_1}{v_1} = \frac{\sin \theta_2}{v_2}.$$

Detta är den enda lokala extrempunkten och måste vara ett globalt minimum för f. (Vi har till exempel att f växer då θ_1 går mot noll.) Därför har vi att den snabbaste vägen fås då

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{v_1}{v_2}.$$