MATEMATIK, Chalmers Tekniska Högskola
Tentamen i Matematik K, del D (TMA151) 1998-05-30.

Lösningar:

1. (a) Standardutvecklingarna
$$\arctan t = t - \frac{t^3}{3} + O(t^5) \quad \text{och} \quad \sin t = t - \frac{t^3}{6} + O(t^5)$$
ger
$$\begin{aligned}\sin\left(\arctan x^2\right) &= \left(x^2 - \frac{x^6}{3}\right) - \frac{\left(x^2 - \frac{x^6}{3}\right)^3}{6} + O(x^{10})\\ &= x^2 - \frac{x^6}{2} + O(x^{10}).\end{aligned}$$
(b) Vi får från (a) att $\sin\left(\arctan x^2\right) - x^2 = -\frac{x^6}{2} + O(x^{10})$, så $n = 6$ ger
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\arctan x^2\right) - x^2}{x^n} = -\frac{1}{2}.$$

2. Övergång till polära koordinater ger
$$I = \iint_D x^2 e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy = \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt \int_a^b r^3 e^r\,dr.$$
Partiell integration ger
$$\int r^3 e^r\,dr = (r^3 - 3r^2 + 6r - 6)e^r,$$
och eftersom $\int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt = \pi$ (utnyttja t.ex. formeln för dubbla vinkeln) så får vi svaret
$$I = \pi\left((b^3 - 3b^2 + 6b - 6)e^b - (a^3 - 3a^2 + 6a - 6)e^a\right).$$

3. Vi ska beräkna största och minsta värde av $f(x,y) = x(1-y)$ under bivillkoret $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Mängden som definieras av $g(x,y) = 0$ är kompakt så största och minsta värde existerar och de antas i punkter där $\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}$ har rangen mindre än 2. Detta är ekvivalent med att $\frac{D(f,g)}{D(x,y)} = 0$. Derivering ger
$$\frac{D(f,g)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} 1-y & -x \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 2y - 2y^2 + 2x^2,$$
och om vi kombinerar detta med bivillkoret så får vi
$$\begin{cases} x^2 - y^2 + y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 - 2y^2 + y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1, \end{cases}$$
vilket har de 3 lösningarna $(x,y) \in \left\{(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}), (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}), (0,1)\right\}$. Insättning av dessa tre punkter i f ger:
Största värde: $f(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.
Minsta värde: $f(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}) = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

4. Laplace-transformering av båda leden ger $Y(s)(s^2+2s-3)=s^2$, där $Y(s)$ är Laplace-transformen av $y(t)$ då $y(0-)=y'(0-)=0$ eftersom $y(t)=0$ för $t<0$. Eftersom $s^2+2s-3=(s-1)(s+3)$ så får vi
$$Y(s)=\frac{s^2}{s^2+2s-3}=1+\frac{-2s+3}{(s-1)(s+3)}=1+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{s-1}-\frac{9}{s+3}\right).$$
Reglerna L10 och L14 ger
$$y(t)=\delta(t)+\frac{1}{4}\left(e^t-9e^{-3t}\right) \text{ då } t\geq 0.$$
Lösningen för godtyckligt t blir då $y(t)=\delta(t)+\frac{1}{4}\left(e^t-9e^{-3t}\right)\Theta(t)$.

5. Differentialformen är $\mathcal{C}^1$ överallt och
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\sin y}+y\cos x\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(xe^x-\frac{y^2\sin x}{2}\right).$$
Därmed beror kurvintegralen bara på start- och slutpunkt och istället för γ kan vi t.ex. ta den räta linjen mellan $(-\frac{1}{\sqrt{2}},0)$ och $(\frac{1}{\sqrt{2}},0)$. Vi parametriserar denna genom $x=t$, $y=0$ och $-\frac{1}{\sqrt{2}}\xrightarrow{t}\frac{1}{\sqrt{2}}$ vilket ger
$$\int_\gamma\left(xe^x-\frac{y^2\sin x}{2}\right)dx+\left(e^{\sin y}+y\cos x\right)dy=\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}te^t dt$$
$$=e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)+e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right).$$

6. En potential ϕ ska uppfylla $\phi'_x=6xz+5yz^2$, $\phi'_y=4z+axz^2$ och $\phi'_z=3x^2+4y+2axyz$. Det första villkoret ger
$$\phi=3x^2z+5xyz^2+f(y,z).$$
Insatt i det andra villkoret får vi
$$4z+axz^2=5xz^2+f'_y(y,z)\Longleftrightarrow 4z-f'_y(y,z)=(5-a)xz^2,$$
från vilket vi drar slutsatsen $a=5$, ty f är oberoende av x. Det ger $f'_y(y,z)=4z$, så $f(y,z)=4yz+g(z)$. Insatt i det sista villkoret får vi
$$3x^2+4y+10xyz=3x^2+10xyz+4y+g'(z),$$
så $g(z)=C$ en konstant. En potential för fältet då $a=5$ är alltså t.ex. $\phi=3x^2z+5xyz^2+4yz$

7. Sätt $F(s)=\int_1^{\frac{1}{s}}\frac{\sin(sx)}{x}dx$. Integranden är begränsad i det aktuella intervallet så det är okej att 'derivera under integraltecknet' vilket ger
$$F'(s)=\int_1^{\frac{1}{s}}\cos(sx)dx+\frac{\sin(s\cdot\frac{1}{s})}{\frac{1}{s}}\left(-\frac{1}{s^2}\right)=\left[\frac{\sin(sx)}{s}\right]_1^{\frac{1}{s}}-\frac{\sin 1}{s}=-\frac{\sin s}{s}.$$
Härav följer att $F'(s)<0$ då $0<s<\pi$ och $F'(s)>0$ då $\pi<s<5$, så $F(s)$ antar sitt minsta värde då $s=\pi$.