MATEMATIK, Chalmers tekniska högskola
Kortfattade lösningar till tentamen i **Matematik K, del D** (TMA151) 2000-05-27.

1. Vi har att
$$f(x) = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$
Evaluering i $a = \frac{\pi}{3}$ ger oss
$$f(\frac{\pi}{3}) = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$
Derivering ger
$$f'(x) = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x},$$
och evaluering
$$f'(\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{3/4} = -\frac{4}{3}.$$
På samma sätt:
$$f''(x) = \frac{2\cos x}{\sin^3 x}$$
och
$$f''(\frac{\pi}{3}) = \frac{2\frac{1}{2}}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^3} = \frac{8}{3\sqrt{3}}.$$
Insättning i den allmäna Taylorformeln
$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)(x-a)^i}{i!} + R_{n+1}(x),$$
ger oss tillslut att
$$f(x) = \cot x = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{4}{3}(x - \frac{\pi}{3}) + \frac{4}{3\sqrt{3}}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + R_3(x).$$

2. Vi ser, antingen genom att beräkna $\mathbf{rot}\bar{F} = \bar{0}$ eller potentialen $\varphi = xy^2 + \ln(xyz)$, att $\bar{F}$ är ett gradientfält, i.e. $\bar{F} = \nabla\varphi$. Detta innebär att inget arbete utförs när partikeln förs i en sluten bana.

3. Låt oss gå över till polära koordinater (r, θ), där $x = r\cos\theta$ och $y = r\sin\theta$.
Halvringen E blir transformerad till rektangeln E^* i de nya koordinaterna.
$$E^* = \{(r,\theta); 1 < r < \sqrt{e},\ 0 < \theta < \pi\}.$$
Detta ger oss direkt att
$$I = \iint_E \ln(x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_0^{\pi}\int_1^{\sqrt{e}} \ln(r^2)\left|\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)}\right| dr\,d\theta = 2\pi\int_1^{\sqrt{e}} \ln(r) r\,dr.$$
Med hjälp av partiell integration får vi sedan att
$$I = 2\pi\left[\frac{r^2}{2}\ln r\right]_1^{\sqrt{e}} - \pi\int_1^{\sqrt{e}} r\,dr = \ldots = \frac{\pi}{2}.$$

4. Laplacetransformation av båda leden ger med hjälp av L07, L05 och L10 att

$$s^2Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-) + Y(s) = \pi e^{-2\pi s}.$$

Insättning av begynnelsevärdena och ommöblering ger oss

$$Y(s) = \frac{\pi e^{-2\pi s} + s}{s^2 + 1}.$$

Tillbakatransformation med hjälp av L15, L16 (med $b = 1$) och L05 ger tillslut att

$$y(t) = \cos(t) + \pi \sin(t - 2\pi)\theta(t - 2\pi).$$

Eftersom $\sin(t - 2\pi) = \sin(t)$ kan vi förenkla lösningen till

$$y(t) = \begin{cases} \cos t & \text{om } t \leq 2\pi \\ \cos t + \pi \sin t & \text{om } t > 2\pi. \end{cases}$$

5. Vi använder Greens formel

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_E \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

där $P = \arcsin(x^2 - 1)$ och $Q = e^{xy}$. Dvs

$$I = \oint_C \arcsin(\frac{x^2 - 1}{3})\,dx + e^{xy}\,dy = \iint_E ye^{xy}\,dx\,dy,$$

där

$$E = \{(x, y) \text{ så att } \frac{1}{2} < y < 2, \frac{1}{2} < x < \frac{1}{y}\}.$$

(Notera att C är positivt orienterad.)

Vi får då att

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{y}} ye^{xy}\,dx\,dy = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left[e^{xy}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{y}} dy = \int_{\frac{1}{2}}^{2} e - e^{\frac{y}{2}}\,dy = \ldots = 2e^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}e.$$

6. Låt botten på lådan vara x bred och y djup och låt z vara höjden. Vi vill minimera ytans area $S = xy + 2xz + 2yz$ under en given volym $V = xyz$. Låt oss använda oss av rangmetoden där $f(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$ och $u(x, y, z) = xyz - V$. Den minsta ytan antas då

$$\text{Rang } \frac{\partial(f, u)}{\partial(x, y, z)} < 2.$$

Vi beräknar Jacobimatrisen:

$$\frac{\partial(f, u)}{\partial(x, y, z)} = \begin{pmatrix} y + 2z & x + 2z & 2x + 2y \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}.$$

Rangen är < 2 om och endast om raderna endast skiljer sig åt med en multiplikativ konstant, säg λ, med andra ord att

$$\begin{cases} y + 2z &= \lambda yz \\ x + 2z &= \lambda xz \\ 2x + 2y &= \lambda xy. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} yx + 2xz &= \lambda xyz \\ xy + 2yz &= \lambda xyz \\ 2xz + 2yz &= \lambda xyz. \end{cases}$$

Genom att addera de två översta raderna och subtrahera med den undre, får vi att $2xy = \lambda xyz$. Eftersom vi kan anta att $x, y, z > 0$ kan vi dividera med xy och sluta oss till att $2 = \lambda z$. Om detta insättes i första respektive andra ekvationen ovan får vi att $x = y = 2z$. Vi ser att detta är den enda lokala extrempunkten, och när x, y eller z går mot 0 (eller ∞) har vi att arean S går mot ∞. Därför måste detta vara förhållandet mellan sidorna i den mest ekonomiska lådan — en kvadratisk botten med höjden som halva bredden.

7. Vi kan använda formeln i Sats 2 på sidan 3:31 i Peterssons bok 3:

$$F'(x) = \int_u^v \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\,dt + f(x,v)\frac{dv}{dx} - f(x,u)\frac{du}{dx},$$

där $u = u(x) = x$, $v = v(x) = x^2$ och $f(x,t) = \arctan(x^2 t)$. (Kolla att förutsättningarna för Sats 2 är uppfyllda!)

Vi får att

$$F'(x) = \int_x^{x^2} \frac{2xt}{1+(x^2t)^2}\,dt + \arctan(x^2x^2)2x - \arctan(x^2x)1.$$

Vi tittar på integralen först.

$$\int_x^{x^2} \frac{2xt}{1+(x^2t)^2}\,dt = \frac{1}{x^3}\int_x^{x^2} \frac{x^4\,2t}{1+x^4t^2}\,dt = \frac{1}{x^3}\Big[\ln(1+x^4t^2)\Big]_x^{x^2} = \frac{1}{x^3}\ln(\frac{1+x^8}{1+x^6}).$$

Vi får alltså att

$$F'(x) = \frac{1}{x^3}\ln(\frac{1+x^8}{1+x^6}) + 2x\arctan(x^4) - \arctan(x^3).$$

8. a) Se Petersson del 2 sidan 11:01.

   b) Se Petersson del 2 sidan 15:08.