OPTIONER OCH MATEMATIK (CTH[$TMA155$]&GU[$MAM690$])

PROBLEM MED LÖSNINGAR
Problemen är inte numrerade efter svårighetsgrad.

BINOMIALMODELLEN: PROBLEM

Uppgift 1. Betrakta binomialmodellen för en aktie och en obligation, där parametrarna uppfyller $u > r > 0$, $d = -u$ och $t \in \{0, 1, 2\}$. Aktiens pris vid tiden t betecknas med $S(t)$. Ett aktiederivat av europeisk typ med slutdagen 2 utbetalar denna dag beloppet $\max(S(0), S(1), S(2))$. Bestäm derivatets värde vid tiden 0.

Uppgift 2. Betrakta binomialmodellen för en aktie och en obligation, där parametrarna uppfyller $u > 0$, $d = -u$, $r = \frac{u}{2}$ och $t \in \{0, 1, 2\}$. Aktiens pris vid tiden t betecknas med $S(t)$. Ett aktiederivat av europeisk typ med slutdagen 2 utbetalar denna dag beloppet

$$(S(0) - S(1))^+ + (S(1) - S(2))^+.$$

Bestäm derivatets värde vid tiden 0.

Uppgift 3. Betrakta binomialmodellen för en aktie och en obligation, där parametrarna uppfyller $u > 0$, $d = -u$, $r = \frac{u}{2}$ och $t \in \{0, 1, 2\}$. Aktiens pris vid tiden t betecknas med $S(t)$. Ett aktiederivat av europeisk typ med slutdagen 2 utbetalar denna dag beloppet

$$S(2) - \min_{t \in \{0,1,2\}} S(t).$$

Bestäm derivatets värde vid tiden 0.

Uppgift 4. Betrakta binomialmodellen för en aktie och en obligation, där parametrarna uppfyller $u > r > 0 \geq d$ och $t \in \{0, 1, ..., n\}$. Aktiens pris vid tiden t betecknas med $S(t)$. Ett aktiederivat av europeisk typ med slutdagen n utbetalar denna dag beloppet Y, där $Y = S(n)$ om $S(0) < S(1) < ... < S(n)$ och $Y = S(0)$ i annat fall. Bestäm derivatets värde vid tiden 0.

Uppgift 5. Betrakta binomialmodellen för en aktie och en obligation i T tidssteg, där parametrarna uppfyller $u > r > 0 > d$ och där $T = 2m$ är ett jämnt positivt heltal. Ett aktiederivat av europeisk typ utfärdas vid tiden 0 och utbetalar slutdagen T beloppet 1 om aktiepriset $(S(n))_{n=0}^{T}$ uppfyller

$$(S(n) - S(n+1))(S(n+1) - S(n+2)) < 0,\ n = 0, ..., T-2.$$

I annat fall utbetalar derivatet ingenting. Bestäm derivatets värde vid tiden 0.

BINOMIALMODELLEN: LÖSNINGAR

Lösning uppgift 1: Sätt $S(0) = s$ och

$$S(t+1) = S(t)e^{X_{t+1}},\ t = 0, 1.$$

Låt $V(t)$ beteckna derivatets värde vid tiden t. Vi har att

$$\begin{pmatrix} V(2)_{|X_1=u,X_2=u} = \max(s, se^u, se^{u+u}) = se^{2u} \\ V(2)_{|X_1=u,X_2=d} = \max(s, se^u, se^{u+d}) = se^u \\ V(2)_{|X_1=d,X_2=u} = \max(s, se^d, se^{d+u}) = s \\ V(2)_{|X_1=d,X_2=d} = \max(s, se^d, se^{d+d}) = s \end{pmatrix}$$

och definieras

$$q_u = \frac{e^r - e^d}{e^u - e^d} = 1 - q_d$$

så följer att

$$\begin{pmatrix} V(1)_{|X_1=u} = e^{-r}(q_u se^{2u} + q_d se^u) \\ V(1)_{|X_1=d} = e^{-r}(q_u s + q_d s) = e^{-r}s \end{pmatrix}.$$

Alltså är

$$V(0) = e^{-r}\left\{q_u e^{-r}(pse^{2u} + q_d se^u) + q_d e^{-r}s\right\} =$$

$$se^{-2r}\left\{q_u^2 e^{2u} + q_u q_d e^u + q_d\right\} \leftarrow SVAR$$

Lösning uppgift 2: Sätt $S(0) = s$ och

$$S(t+1) = S(t)e^{X_{t+1}},\ t = 0, 1.$$

Låt $V(t)$ beteckna derivatets värde vid tiden t. Vi har att

$$\begin{pmatrix} V(2)_{|X_1=u,X_2=u} = (s - se^u)^+ + (se^u - se^{u+u})^+ = 0 \\ V(2)_{|X_1=u,X_2=d} = (s - se^u)^+ + (se^u - se^{u+d})^+ = s(e^u - 1) \\ V(2)_{|X_1=d,X_2=u} = (s - se^d)^+ + (se^d - se^{d+u})^+ = s(1 - e^d) \\ V(2)_{|X_1=d,X_2=d} = (s - se^d)^+ + (se^d - se^{d+d})^+ = s(1 - e^{2d}) \end{pmatrix}$$

och definieras

$$q_u = \frac{e^r - e^d}{e^u - e^d} = 1 - q_d$$

så följer att

$$\begin{pmatrix} V(1)_{|X_1=u} = e^{-r}(0 + q_d s(e^u - 1)) \\ V(1)_{|X_1=d} = e^{-r}(q_u s(1 - e^d) + q_d s(1 - e^{2d})) \end{pmatrix}$$

dvs

$$\begin{pmatrix} V(1)_{|X_1=u} = sq_d e^{-r}(e^u - 1) \\ V(1)_{|X_1=d} = se^{-r}(1 - e^d)(1 + q_d e^d) \end{pmatrix}.$$

Alltså är

$$V(0) = e^{-r}(q_u s q_d e^{-r}(e^u - 1) + q_d s e^{-r}(1 - e^d)(1 + q_d e^d)) =$$

$$sq_d e^{-2r}(q_u(e^u - 1) + (1 - e^d)(1 + q_d e^d)) =$$

$$se^{-\frac{u}{2}}\frac{e^u - 1}{e^u + 1} \leftarrow SVAR$$

Uppgiften är löst.

Lösning uppgift 3: Sätt $S(0) = s$ och

$$S(t+1) = S(t)e^{X_{t+1}},\ t = 0, 1.$$

Låt $v(t)$ beteckna derivatets värde vid tiden t. Vi har att

$$\left(\begin{array}{c} v(2)_{|X_1=u,X_2=u} = se^{2u} - s = s(e^{2u}-1) \\ v(2)_{|X_1=u,X_2=d} = se^{u+d} - s = 0 \\ v(2)_{|X_1=d,X_2=u} = se^{d+u} - se^{d} = s(1-e^{-u}) \\ v(2)_{|X_1=d,X_2=d} = se^{2d} - se^{2d} = 0. \end{array}\right)$$

och definieras

$$q_u = \frac{e^r - e^d}{e^u - e^d} = 1 - q_d$$

så följer att

$$\left(\begin{array}{c} v(1)_{|X_1=u} = e^{-r}(q_u s(e^{2u}-1) + q_d 0) \\ v(1)_{|X_1=d} = e^{-r}(q_u s(1-e^{-u}) + q_u 0) \end{array}\right)$$

dvs

$$\left(\begin{array}{c} v(1)_{|X_1=u} = se^{-r}q_u(e^{2u}-1) \\ v(1)_{|X_1=d} = se^{-r}q_u(1-e^{-u}) \end{array}\right).$$

Alltså är

$$\begin{aligned} v(0) &= e^{-r}(se^{-r}q_u(e^{2u}-1) + se^{-r}q_u(1-e^{-u})) \\ &= se^{-2r}q_u(e^{2u}-e^{-u}) \leftarrow SVAR \end{aligned}$$

Lösning uppgift 4: Eftersom $S(0)$ är en känd konstant är derivatets värde $v(0)$ vid tiden 0 är lika med $e^{-rn}E^{Q}[Y]$, där Q är martingalmåttet. Här gäller att

$$Q[S(0) < S(1) < ... < S(n)] = Q[\text{aktien går upp i varje tidssteg}] =$$

$$\left(\frac{e^r - e^d}{e^u - e^d}\right)^n.$$

Alltså är

$$v(0) = e^{-rn}\left\{\left(\frac{e^r - e^d}{e^u - e^d}\right)^n S(0)e^{nu} + (1 - \left(\frac{e^r - e^d}{e^u - e^d}\right)^n)S(0)\right\}$$

eller

$$v(0) = e^{-rn}\left\{1 + \left(\frac{e^r - e^d}{e^u - e^d}\right)^n (e^{nu}-1)\right\}S(0) \leftarrow SVAR$$

Lösning uppgift 5: Låt

$$q_u = \frac{e^r - e^d}{e^u - e^d} = 1 - q_d.$$

Derivatets värde ges av

$$e^{-rT}(q_u q_d q_u q_d \cdot ... \cdot q_u q_d \cdot 1 + ... + q_d q_u q_d q_u \cdot ... \cdot q_d q_u \cdot 1)$$

$$= e^{-rT}(q_u^m q_d^m + ... + q_d^m q_u^m) = 2e^{-rT} q_u^m q_d^m \leftarrow SVAR$$

BLACK-SCHOLES MODELL: PROBLEM

I Black-Scholes modell finns en obligation vars pris $B(t)$ vid tiden t ges av ekvationen $B(t) = B(0)e^{rt}$, där $B(0)$ och r är positiva konstanter. Därutöver finns en aktie vars pris $S(t)$ vid tiden t är lika med

$$S(t) = S(0)e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2}) + \sigma W(t)}$$

där μ är en reell konstant och $S(0)$ och σ är positiva konstanter.

Uppgift 1. Ett aktiederivat av europeisk typ utbetalar $\frac{1}{S(T)}$ slutdagen $T > 0$. Bestäm derivatets värde vid tiden $t \in [0, T]$.

Uppgift 2. Antag $n \in \mathbf{N}_+$, $0 < T_0 < T$ och

$$T_j = T_0 + \frac{j}{n}(T - T_0), \; j = 1, ..., n.$$

Ett aktiederivat utbetalar $\mid S(T_j) - S(T_{j-1}) \mid$ vid tiden T_j för $j = 1, ..., n$. Bestäm derivatets värde $v(t) = v_n(t)$ vid tiden $t \in [0, T_0]$. Visa också att $v_n(t) \to \infty$ då $n \to \infty$.

Uppgift 3. Antag $\theta \in \mathbf{R}$ och betrakta ett aktiederivat av europeisk typ som utbetalar beloppet $B(T)^{1-\theta}S(T)^{\theta}$ slutdagen T. Derivatets värde vid tiden $t < T$ är en funktion av $B(t)$, $S(t)$, $T-t$, σ och θ. Bestäm denna funktion.

Uppgift 4. Låt $t_0 < T$ och betrakta ett aktiederivat av europeisk typ som utbetalar beloppet $\max(S(t_0), S(T))$ slutdagen T. Bestäm derivatets värde vid en godtycklig tidpunkt $t \leq t_0$.

Uppgift 5. Antag att $K, T > 0$ och $S(0) < Ke^{-\mu T}$. Bestäm det största talet $\sigma_0 > 0$ sådant att sannolikheten $P[S(T) > K]$ är en växande funktion av σ i intervallet $[0, \sigma_0]$.

Uppgift 6. Ett aktiederivat av europeisk typ utbetalar beloppet $\max(S(T), K)$ slutdagen $T > 0$, där $K > 0$ är ett givet tal. Låt $u(t, S(t))$ beteckna derivatets värde vid tiden $t < T$. a) Visa att $u'_s(t,s) = \Phi(d_1)$. b) Visa att funktionen

$$\frac{su'_s(t,s)}{u(t,s)}, \ s > 0$$

är strängt växande för fixt t. Ge en ekonomisk tolkning av denna egenskap.

Uppgift 7. Låt $t < T < T_1$ och $K > 0$. Ett finansiellt derivat ger innehavaren rättigheten, men ej skyldigheten, att vid tiden T byta en europeisk säljoption i aktien med slutdagen T_1 och lösenpriset K mot en europeisk köpoption i aktien med slutdagen T_1 och lösenpriset K. Bestäm derivatets värde vid tiden t.

Uppgift 8. En europeisk köpoption i aktien med slutdagen T och lösenpriset K har det teoretiska priset $c(t, S(t), K)$ vid tiden $t \in [0, T[$, där $c(t,s,K) = s\Phi(d_1) - Ke^{-r\tau}\Phi(d_2)$, $\tau = T - t$,

$$d_1 = \frac{\ln \frac{s}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

och $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$. Visa att

a)

$$\frac{\partial c}{\partial s} = \Phi(d_1)$$

b)

$$\frac{c(t,s,K)}{c(t,s_0,K)} > \frac{s}{s_0} \text{ om } s > s_0.$$

Uppgift 9. Antag $0 \leq t \leq T < T_1$ och $L > 0$. Ett finansiellt derivat ger innehavaren rättigheten, men ej skyldigheten, att vid tiden T välja antingen en aktieköpoption med lösenpriset $S(T)$ och slutdagen T_1 eller ett fixt belopp L. Bestäm derivatets värde vid tiden t.

Uppgift 10. a) Ett aktiederivat av europeisk typ har slutdagen T och utbetalningsfunktionen $g(s) = \ln s$. Bestäm derivatets värde vid tiden $t < T$. b) Betrakta en självfinansierande portföljstrategi i aktien och obligationen med värdet $g(S(T))$ vid tiden T. Hur många aktier ingår i portföljen vid tiden $t < T$?

Uppgift 11. För en viss aktie gäller att $\sigma^2 > 2\mu \geq 2r$. Vid vilken tidpunkt $t > 0$ är storheten

$$P\left[S(t) \leq 2S(0)\right]$$

minimal?

Uppgift 12. Under vilka villkor på parametrarna μ och σ är sannolikheten

$$P\left[S(t) \leq 2S(0)\right]$$

en avtagande funktion av t för alla $t \geq 0$?

BLACK-SCHOLES MODELL: LÖSNINGAR

Lösning uppgift 1: Sätt $f(s) = \frac{1}{s}$, $s > 0$ och $\tau = T - t$. Derivatets värde vid tiden t är lika med $v(t, S(t))$ där

$$v(t,s) = e^{-r\tau} E\left[f(se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau + \sigma W(\tau)}) \right].$$

Härav följer att

$$v(t,s) = e^{-r\tau} E\left[\frac{1}{se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau + \sigma W(\tau)}} \right] =$$

$$\frac{1}{s} e^{-(2r-\frac{\sigma^2}{2})\tau} E\left[e^{-\sigma W(\tau)} \right] = \frac{1}{s} e^{-(2r-\frac{\sigma^2}{2})\tau} e^{\frac{\sigma^2}{2}\tau} = \frac{1}{s} e^{(\sigma^2 - 2r)\tau} \leftarrow SVAR$$

Lösning uppgift 2: Om a är ett reellt tal så är $\mid a \mid = 2\max(0,a) - a$. Vi låter först $j \in \{1, ..., n\}$ vara fixt. Utbetalningsbeloppet vid tiden T_j kan skrivas

$$\mid S(T_j) - S(T_{j-1}) \mid = 2\max(0, S(T_j) - S(T_{j-1})) - S(T_j) + S(T_{j-1}).$$

Ett derivat som vid tiden T_j utbetalar $\mid S(T_j) - S(T_{j-1}) \mid$ har därför enligt dominansprincipen värdet

$$2c(T_{j-1}, S(T_{j-1}), S(T_{j-1}); T_j) - S(T_{j-1}) + S(T_{j-1})e^{-r\tau_n}$$

vid tiden T_{j-1} där

$$\tau_n = \frac{1}{n}(T - T_0).$$

Här är

$$c(T_{j-1}, S(T_{j-1}), S(T_{j-1}); T_j) = S(T_{j-1}) b_n$$

där enligt Black-Scholes formel för den europeiska köpoptionens värde gäller att

$$b_n = \Phi(\frac{(r + \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma}\sqrt{\tau_n}) - e^{-r\tau_n}\Phi(\frac{(r - \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma}\sqrt{\tau_n}).$$

Ett derivat som vid tiden T_j utbetalar $\mid S(T_j) - S(T_{j-1}) \mid$ har alltså enligt dominansprincipen värdet

$$2S(t)b_n - S(t) + S(t)e^{-r\tau_n} = S(t)(2b_n - 1 + e^{-r\tau_n})$$

vid tiden $t \in [0, T_{j-1}]$.

Ett derivat i aktien som utbetalar $\mid S(T_j) - S(T_{j-1}) \mid$ vid tiden T_j för $j = 1, ..., n$ har därför värdet

$$v_n(t) = nS(t)(2b_n - 1 + e^{-r\tau_n})$$

vid tiden $t \in [0, T_0]$. Här gäller att

$$\lim_{n\to\infty} n(-1 + e^{-r\tau_n}) = -r(T - T_0).$$

Vidare visar en Maclaurinutveckling av funktionen $\Phi(x)$, $x \in \mathbf{R}$, att

$$b_n = \Phi(\frac{(r + \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma}\sqrt{\tau_n}) - e^{-r\tau_n}\Phi(\frac{(r - \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma}\sqrt{\tau_n}) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\tau_n} + O(\frac{1}{n})$$

då $n \to \infty$. Härav följer att $v_n(t) \to \infty$ då $n \to \infty$.

Svar: Derivatets värde vid tiden $t \in [0, T_0]$ är lika med

$$nS(t)(2b_n - 1 + e^{-r\tau_n})$$

där b_n och τ_n definieras ovan.

Lösning uppgift 3: Sätt $f(s) = B(T)^{1-\theta}s^\theta$, $s > 0$ och $\tau = T - t$. Derivatets värde vid tiden t är lika med $v(t, S(t))$ där

$$v(t, s) = e^{-r\tau}E\left[f(se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau+\sigma W(\tau)})\right].$$

Härav följer att

$$v(t, s) = B(T)^{1-\theta}e^{-r\tau}E\left[s^\theta e^{\theta(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau+\theta\sigma W(\tau)}\right] =$$

$$B(T)^{1-\theta}e^{-r\tau}s^\theta e^{\theta(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau}E\left[e^{\theta\sigma W(\tau)}\right] = B(T)^{1-\theta}e^{-r\tau}s^\theta e^{\theta(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau}e^{\frac{1}{2}\theta^2\sigma^2\tau} =$$

$$B(T)^{1-\theta}e^{-(1-\theta)r\tau}s^\theta e^{\frac{1}{2}\theta(\theta-1)\sigma^2\tau}.$$

Vi får därför att

$$v(t, S(t)) = B(T)^{1-\theta}e^{-(1-\theta)r\tau}S(t)^\theta e^{\frac{1}{2}\theta(\theta-1)\sigma^2\tau} = e^{\frac{1}{2}\theta(\theta-1)\sigma^2\tau}B(t)^{1-\theta}S(t)^\theta \leftarrow SVAR$$

Lösning uppgift 4: Vi har att

$$\max(S(t_0), S(T)) = S(t_0) + \max(0, (S(T) - S(t_0)).$$

Låt $v(t)$ beteckna derivatets värde vid tiden t. Om $t \in [t_0, T]$ så ger dominansprincipen att

$$v(t) = S(t_0)e^{-r(T-t)} + c(t, S(t), S(t_0); T).$$

Vi påminner om att det för $t < T$ gäller att

$$c(t, s, K; T) = s\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$$

där

$$d_1 = \frac{\ln \frac{s}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

och $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$. Alltså är

$$v(t_0) = S(t_0)(e^{-r(T-t_0)} + c(t_0, 1, 1; T))$$

och dominansprincipen ger för $t \leq t_0$ att

$$v(t) = S(t)(e^{-r(T-t_0)} + c(t_0, 1, 1; T)).$$

Här är

$$c(t_0, 1, 1; T)) = \Phi((\frac{r}{\sigma} + \frac{1}{2}\sigma)\sqrt{T-t_0}) - e^{-r(T-t_0)}\Phi((\frac{r}{\sigma} - \frac{1}{2}\sigma)\sqrt{T-t_0}))$$

och det följer att

$$v(t) = S(t)(\Phi((\frac{r}{\sigma} + \frac{1}{2}\sigma)\sqrt{T-t_0}) + e^{-r(T-t_0)}(1 - \Phi((\frac{r}{\sigma} - \frac{1}{2}\sigma)\sqrt{T-t_0}))) =$$

$$S(t)(\Phi((\frac{r}{\sigma} + \frac{1}{2}\sigma)\sqrt{T-t_0}) + e^{-r(T-t_0)}\Phi((-\frac{r}{\sigma} + \frac{1}{2}\sigma)\sqrt{T-t_0})).$$

Svar: $v(t) = S(t)(\Phi((\frac{r}{\sigma} + \frac{1}{2}\sigma)\sqrt{T-t_0}) + e^{-r(T-t_0)}\Phi((-\frac{r}{\sigma} + \frac{1}{2}\sigma)\sqrt{T-t_0}))$, $t \leq t_0$

Lösning uppgift 5: Sätt $f(\sigma) = P\,[S(T) > K]$ och $s = S(0)$. Relationen

$$S(T) = se^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma W(T)}$$

ger

$$f(\sigma) = P\left[se^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma W(T)} > K\right] =$$

$$P\left[-W(T) < \frac{1}{\sigma}\ln\frac{se^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})T}}{K}\right] = \Phi(\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}(\ln\frac{s}{K} + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})T).$$

Eftersom $\Phi' > 0$ så är $f'(\sigma) \geq 0$ om och endast om

$$\frac{d}{d\sigma}\left\{\frac{1}{\sigma}(\ln\frac{s}{K} + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})T)\right\} \geq 0$$

vilket betyder att

$$-\frac{1}{\sigma^2}(\ln\frac{s}{K} + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})T) - T \geq 0$$

eller

$$\sigma \leq \sqrt{\frac{2}{T}\ln\frac{K}{s} - 2\mu}.$$

Svar: $\sigma_0 = \sqrt{\frac{2}{T}\ln\frac{K}{S(0)} - 2\mu}$

Lösning uppgift 6: a) Det gäller att $\max(S(T), K) = K + \max(0, S(T) - K)$ och dominansprincipen medför att $u(t, S(T)) = Ke^{-r\tau} + c(t, S(t), K; T)$. Vidare vet vi att

$$c(t, s, K; T) = s\Phi(d_1) - Ke^{-r\tau}\Phi(d_2).$$

Med beteckningen $\varphi = \Phi'$ får vi därför att

$$\frac{\partial}{\partial s}c(t, s, K; T) = \Phi(d_1) + s\frac{1}{s\sigma\sqrt{\tau}}\varphi(d_1) - Ke^{-r\tau}\frac{1}{s\sigma\sqrt{\tau}}\varphi(d_2).$$

Vidare följer att

$$s\varphi(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} s e^{-\frac{1}{2\sigma^2\tau}(\ln \frac{s}{Ke^{-r\tau}} + \frac{1}{2}\sigma^2\tau)^2} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} s \frac{Ke^{-r\tau}}{s} e^{-\frac{1}{2\sigma^2\tau}(\ln \frac{s}{Ke^{-r\tau}} - \frac{1}{2}\sigma^2\tau)^2} = Ke^{-r\tau}\varphi(d_2)$$

varför

$$\frac{\partial}{\partial s} c(t, s, K; T) = \Phi(d_1)$$

och

$$u'_s(t, s) = \Phi(d_1).$$

b) Sätt

$$\phi(s) = \frac{s u'_s(t, s)}{u(t, s)}.$$

Det följer att

$$\phi(s) = \frac{s\Phi(d_1)}{Ke^{-r\tau} + s\Phi(d_1) - Ke^{-r\tau}\Phi(d_2)} =$$

$$\frac{s\Phi(d_1)}{s\Phi(d_1) + Ke^{-r\tau}\Phi(-d_2)} = \frac{1}{1 + Ke^{-r\tau} f(s)}$$

där

$$f(s) = \Phi(-d_2) \frac{1}{s} \frac{1}{\Phi(d_1)}$$

är en produkt av tre positiva strängt avtagande funktioner. Funktionen $f(s)$ är därför strängt avtagande och funktionen $\phi(s)$ är därmed strängt växande.

Betrakta en självfinansierande strategi i aktien och obligationen, som innehåller $u'_s(t, S(t))$ aktier vid tiden t och som har värdet $\max(K, S(T))$ slutdagen T. Portföljens aktievärde vid tiden $t < T$ ges av $u'_s(t, S(t))S(t)$ och portföljen består därför vid denna tidpunkt till

$$\frac{S(t)u'_s(t, S(t))}{u(t, S(t))} \times 100$$

procent av aktier. Vi kan därför säga att denna procentandel växer strängt med aktiepriset om alla andra oberoende variabler hålls konstanta.

Lösning uppgift 7: Låt $V(t)$ beteckna derivatets värde vid tiden $t \leq T$. Förutsättningen ger att

$$V(T) = \max(0, c(T, S(T), K; T_1) - p(T, S(T), K; T_1)).$$

Men

$$S(T) - c(T, S(T), K; T_1) = Ke^{-r(T_1 - T)} - p(T, S(T), K; T_1).$$

(”put-call parity relation”) och det följer att

$$V(T) = \max(0, S(T) - Ke^{-r(T_1-T)}) = c(T, S(T), Ke^{-r(T_1-T)}; T).$$

Dominansprincipen ger nu att

$$V(t) = c(t, S(t), Ke^{-r(T_1-T)}; T).$$

Om $t < T$ följer slutligen att

$$V(t) = S(t)\Phi(\frac{\ln\frac{S(t)}{K} + r(T_1 - T) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}})-$$

$$Ke^{-r(T_1-T)}e^{-r(T-t)}\Phi(\frac{\ln\frac{S(t)}{K} + r(T_1 - T) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}) \leftarrow SVAR$$

Lösning uppgift 8: a) Vi har att

$$\frac{\partial c}{\partial s} = \Phi(d_1) + s\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_1^2}{2}}\frac{\partial d_1}{\partial s} - Ke^{-r\tau}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_2^2}{2}}\frac{\partial d_2}{\partial s} =$$

$$\Phi(d_1) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\partial d_1}{\partial s}\left\{se^{-\frac{d_1^2}{2}} - Ke^{-r\tau}e^{-\frac{d_2^2}{2}}\right\} =$$

$$\Phi(d_1) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\partial d_1}{\partial s}\left\{se^{-\frac{d_1^2}{2}} - Ke^{-r\tau}e^{-\frac{d_1^2}{2}+d_1\sigma\sqrt{\tau}-\frac{\sigma^2\tau}{2}}\right\} =$$

$$\Phi(d_1) + \frac{e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\frac{\partial d_1}{\partial s}\left\{s - Ke^{-r\tau}e^{d_1\sigma\sqrt{\tau}-\frac{\sigma^2\tau}{2}}\right\} = \Phi(d_1).$$

b) Det räcker att visa att funktionen

$$f(s) = \frac{c(t, s, K)}{s},\ \ s > 0$$

är strängt växande. Men

$$f'(s) = \frac{s\frac{\partial c}{\partial s} - c \cdot 1}{s^2} = \frac{s\Phi(d_1) - (s\Phi(d_1) - Ke^{-r\tau}\Phi(d_2))}{s^2} =$$

$$\frac{Ke^{-r\tau}\Phi(d_2)}{s^2} > 0$$

och det följer omedelbart att f är strängt växande.

Alternativ lösning till uppgift 8b): Optionsprisets elasticitet med avseende på aktiepriset är lika med

$$\frac{s}{c}\frac{\partial c}{\partial s} = \frac{s\Phi(d_1)}{s\Phi(d_1) - Ke^{-r\tau}\Phi(d_2)} > 1.$$

Om $s_1 > s_0$ följer därför att

$$\int_{s_0}^{s_1} \frac{1}{c}\frac{\partial c}{\partial s} ds > \int_{s_0}^{s_1} \frac{1}{s} ds$$

dvs

$$\ln c(t, s_1, K) - \ln c(t, s_0, K) > \ln s_1 - \ln s_0$$

eller

$$\frac{c(t, s_1, K)}{c(t, s_0, K)} > \frac{s_1}{s_0}.$$

Lösning uppgift 9: Derivatets värde vid tiden t betecknas med $v(t)$. Enligt förutsättning gäller att $v(T) = \max(0, c(T), L) = \max(c(T), L)$, där

$$c(T) = c(T, S(T), S(T); T_1) = c(T, 1, 1; T_1)S(T).$$

Alltså blir

$$v(T) = (c(T) - L)^+ + L$$
$$= c(T, 1, 1; T_1)(S(T) - \frac{L}{c(T, 1, 1; T_1)})^+ + L$$

och det följer att

$$v(t) = c(T, 1, 1; T_1)c(t, S(t), \frac{L}{c(T, 1, 1; T_1)}; T) + Le^{-r(T-t)}$$

eller

$$v(t) = c(t, c(T, 1, 1; T_1)S(t), L; T) + Le^{-r(T-t)} \leftarrow SVAR$$

Här är

$$c(T, s, K; T) = \max(0, s - K)$$

och för $t < T$ gäller att

$$c(t, s, K; T) = s\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$$

där

$$d_1 = \frac{\ln\frac{s}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

och

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T - t}.$$

Lösning uppgift 10: a) Derivatets värde vid tiden t är lika med $v(t, S(t))$, där

$$v(t, s) = e^{-r\tau}E\left[g(se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau+\sigma W(\tau)})\right]$$

och $\tau = T - t$. Alltså är

$$v(t, s) = e^{-r\tau}E\left[\ln s + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau + \sigma W(\tau)\right]$$

$$= e^{-r\tau}(\ln s + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau).$$

Svar: $e^{-r\tau}(\ln S(t) + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau)$

b) Om en självfinansierande portföljstrategi i aktien och obligationen har värdet $V(t) = v(t, S(t)$ vid tiden t, där $V(T) = g(S(T))$, så är antalet aktier i portföljen vid tiden t lika med $v'_s(t, S(t))$ dvs i detta fall

$$e^{-r\tau}\frac{1}{S(t)} \text{ aktier.} \leftarrow SVAR$$

Lösning uppgift 11: Det gäller att

$$P\left[S(t) \leq 2S(0)\right] = P\left[e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma W(t)} \leq 2\right]$$

$$P\left[(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t) \leq \ln 2\right] = P\left[\sigma W(t) \leq \ln 2 + (\frac{\sigma^2}{2} - \mu)t\right]$$

$$P\left[\sigma\sqrt{t}G \leq \ln 2 + (\frac{\sigma^2}{2} - \mu)t\right]$$

där $G \in N(0,1)$. Alltså är

$$P\left[S(t) \leq 2S(0)\right] = \Phi(\frac{1}{\sigma}\left\{\frac{\ln 2}{\sqrt{t}} + (\frac{\sigma^2}{2} - \mu)\sqrt{t}\right\}).$$

Sätt

$$f(x) = \frac{\ln 2}{x} + (\frac{\sigma^2}{2} - \mu)x, \; x > 0.$$

Funktionen f är konvex och $f'(x) = 0$ om och endast om

$$x = \sqrt{\frac{2\ln 2}{\sigma^2 - 2\mu}}.$$

Alltså är

$$\min_{x>0} f(x) = f(\sqrt{\frac{2\ln 2}{\sigma^2 - 2\mu}}).$$

Svar: $\frac{2\ln 2}{\sigma^2 - 2\mu}$

Lösning uppgift 12: Det gäller att

$$P\left[S(t) \leq 2S(0)\right] = P\left[e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t)} \leq 2\right]$$

$$= P\left[(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t) \leq \ln 2\right] = P\left[\sigma W(t) \leq \ln 2 + (\frac{\sigma^2}{2} - \mu)t\right]$$

$$= P\left[\sigma\sqrt{t}G \leq \ln 2 + (\frac{\sigma^2}{2} - \mu)t\right]$$

där $G \in N(0,1)$. Alltså är

$$P\left[S(t) \leq 2S(0)\right] = \Phi(\frac{1}{\sigma}\left\{\frac{\ln 2}{\sqrt{t}} + (\frac{\sigma^2}{2} - \mu)\sqrt{t}\right\}).$$

Sätt

$$f(x) = \frac{\ln 2}{x} + (\frac{\sigma^2}{2} - \mu)x, \; x > 0.$$

Funktionen f är strikt konvex och

$$f'(x) = -\frac{\ln 2}{x^2} + \frac{\sigma^2}{2} - \mu.$$

Om$\frac{\sigma^2}{2} - \mu \leq 0$ är $f'(x) < 0$ och f är strängt avtagande. Om $\frac{\sigma^2}{2} - \mu > 0$ är $f'(x_0) = 0$ där

$$x_0 = \sqrt{\frac{2\ln 2}{\sigma^2 - 2\mu}}.$$

Alltså är f strikt växande i intervallet $[0, x_0[$.

Svar: Den givna sannolikheten är avtagande om och endast om $\mu \geq \frac{\sigma^2}{2}$.