LÖSNINGAR OPTIONER OCH MATEMATIK OCH MATEMATIK OCH OPTIONER 19 MAJ 2001

– –

OPTIONER OCH MATEMATIK

1. (Binomialmodellen med $d = -u < 0$, $0 < r < u$ och $T = 2$) Ett derivat av europeisk typ utbetalar beloppet

$$Y = \max(0, S(2) - S(0))$$

slutdagen $T = 2$. a) Bestäm derivatets värde vid tiden $t = 0$. b) Låt $h = (h_S(t), h_B(t))_{t=0}^2$ vara en självfinansierande strategi som replikerar Y dvs uppfyller $V_h(2) = Y$. Bestäm $h_S(0)$.

Lösning uppgift 1*:* a) Sätt $S(0) = s$ och

$$S(t+1) = S(t)e^{X_{t+1}},\ \ t = 0, 1.$$

Låt $V(t)$ beteckna derivatets värde vid tiden t. Vi har att

$$\begin{pmatrix} V(2)_{|X_1=u,X_2=u} = se^{2u} - s = s(e^{2u} - 1) \\ V(2)_{|X_1=u,X_2=d} = 0 \\ V(2)_{|X_1=d,X_2=u} = 0 \\ V(2)_{|X_1=d,X_2=d} = 0 \end{pmatrix}.$$

Definieras

$$\begin{cases} q_u = \frac{1-e^{-u}}{e^u - e^{-u}} \\ q_d = \frac{e^{-u}-1}{e^u - e^{-u}} \end{cases}$$

så följer att

$$\begin{pmatrix} V(1)_{|X_1=u} = q_u se^{-r}(e^{2u} - 1) \\ V(1)_{|X_1=d} = 0 \end{pmatrix}.$$

Alltså är

$$V(0) = q_u^2 se^{-2r}(e^{2u} - 1) = se^{-2r}\frac{(e^u - 1)^2}{e^{2u} - 1}$$

$$= se^{-2r}\frac{e^u - 1}{e^u + 1} \leftarrow SVAR$$

b) Kom ihåg att

$$\begin{cases} h_S(1)se^u + h_B(1)B(1) = V(1)_{|X_1=u} \\ h_S(1)se^d + h_B(1)B(1) = V(1)_{|X_1=d} \end{cases}$$

där $h(0) = h(1)$. Alltså är

$$h_S(0) = \frac{q_u e^{-r}(e^{2u}-1)}{e^u - e^{-u}} = e^{-r}\frac{e^u - 1}{e^u - e^{-u}}$$

dvs

$$h_S(0) = \frac{e^{u-r}}{e^u + 1} \leftarrow SVAR$$

2. (Värdepappersmodell med r konstant, där dominansprincipen gäller) Ett aktiederivat av europeisk typ utbetalar beloppet $Y = \mid S(T) - K \mid$ slutdagen T, där K är en given positiv konstant. Bilda en portfölj $\mathcal{A}$ bestående av aktier, obligationer och aktieköpoptioner så att derivatets och portföljens värden är lika vid varje tidpunkt $t \leq T$ dvs bestäm $\mathcal{A}$ så att $\Pi_Y(t) = V_{\mathcal{A}}(t)$ för $t \leq T$.

Lösning uppgift 2*:* Det gäller att

$$\mid S(T) - K \mid = \max(0, S(T) - K) + \max(0, K - S(T)).$$

Alltså är $\Pi_Y(t) = V_{\mathcal{B}}(t)$ för $t \leq T$, där $\mathcal{B}$ är en portfölj som består av 1 köpoption med lösenpris K och slutdag T och 1 säljoption av europeisk typ med lösenpris K och slutdag T. Nu är

$$p(t, S(t), K; T) = c(t, S(t), K; T) + \frac{K}{B(T)}B(t) - S(t).$$

Alltså är $\Pi_Y(t) = V_{\mathcal{A}}(t)$ om $\mathcal{A}$ består av 2 köpoptioner båda med lösenpris K och slutdag T, $\frac{K}{B(T)}$ obligationer och -1 aktie.

3. (Black-Scholes modell) Ett aktiederivat av europeisk typ har slutdagen T och utbetalar denna dag beloppet $\sqrt{S(T)}$. Beräkna derivatets pris vid tiden $t < T$.

Lösning uppgift 3: Sätt $g(s) = \sqrt{s}$. Derivatets pris vid tiden t är lika med $v(t, S(t))$ där

$$v(t,s) = e^{-r\tau} E\left[g(se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau + \sigma W(\tau)})\right].$$

Härav följer att

$$v(t,s) = e^{-r\tau} E\left[\sqrt{s} e^{\frac{1}{2}(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau}\ e^{\frac{\sigma}{2}W(\tau)}\right]$$

$$= \sqrt{s} e^{-\frac{1}{2}(r+\frac{\sigma^2}{2})\tau}\ E\left[e^{\frac{\sigma}{2}W(\tau)}\right] = \sqrt{s} e^{-\frac{1}{2}(r+\frac{\sigma^2}{2})\tau}\ e^{\frac{\sigma^2}{8}\tau}$$

$$= \sqrt{s} e^{-\frac{1}{2}(r+\frac{\sigma^2}{4})\tau}\ .$$

Derivatets pris vid tiden t är alltså

$$\sqrt{S(t)} e^{-\frac{1}{2}(r+\frac{\sigma^2}{4})\tau} \ \leftarrow SVAR$$

4. (Black-Scholes modell för utdelande aktie) Ett aktiederivat av europeisk typ har slutdagen T och utbetalar denna dag beloppet $\max(0, \ln \frac{S(T)}{K})$, där K är en given positiv konstant. Aktien utdelar det kända beloppet D vid tiden $t_* < T$. Bestäm derivatets värde vid tiden $t < t_*$ (aktiepriset vid tiden t är strikt större än D).

Lösning uppgift 4: Sätt $g(s) = \max(0, \ln \frac{s}{K})$. Derivatets värde vid tiden t är lika med $v(t, S(t))$ där

$$v(t,s) = e^{-r\tau} E\left[g((s - De^{r(t-t_*)})e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau + \sigma W(\tau)})\right].$$

Sätt $s^* = s - De^{r(t-t_*)}$, $\hat{s} = \frac{s^*}{K}$ och låt $G \in N(0,1)$. Vi får

$$v(t,s) = e^{-r\tau} E\left[g(s^* e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau - \sigma\sqrt{\tau}G})\right]$$

$$= e^{-r\tau} E\left[\max(0, \ln \hat{s} + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau - \sigma\sqrt{\tau}G)\right]$$

$$= e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \max(0, \ln \hat{s} + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau - \sigma\sqrt{\tau}x) e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$$

$$= e^{-r\tau}\int_{-\infty}^{\frac{\ln\hat{s}+(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}}(\ln\hat{s}+(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau-\sigma\sqrt{\tau}x)e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$$

$$= e^{-r\tau}\left((\ln\hat{s}+(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau)\Phi(\frac{\ln\hat{s}+(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}})+\frac{\sigma\sqrt{\tau}}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln\hat{s}+(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)^2}\right).$$

Genom att ersätta $\hat{s}$ med $(S(t)-De^{r(t-t_*)})/K$ i detta uttryck erhålls derivatets värde vid tiden t.

MATEMATIK OCH OPTIONER

3 a) Bestäm en lösning till den stokastiska differentialekvationen

$$\begin{cases} dX(t) = tX(t)dt + X(t)dW(t) \\ X(0) = 2,\ t \geq 0\,. \end{cases}$$

b) Beräkna därefter $E\left[X(t)\right]$.

Lösning uppgift 3*:* a) Vi multiplicerar ekvationen med den integrerande faktorn $e^{-\frac{t^2}{2}}$ och får

$$d(e^{-\frac{t^2}{2}}X(t)) = e^{-\frac{t^2}{2}}X(t)dW(t).$$

Sätt $Y(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}X(t)$ så att

$$dY(t) = Y(t)dW(t).$$

Denna ekvation är av samma typ som den stokastiska differentialekvationen för ett aktiepris i Black-Scholes modell och vi får en lösning på formen

$$Y(t) = Y(0)e^{-\frac{t}{2}+W(t)}$$

dvs

$$X(t) = X(0)e^{\frac{t^2}{2}-\frac{t}{2}+W(t)}.$$

Eftersom $X(0) = 2$ följer att

$$X(t) = 2e^{\frac{t^2}{2}-\frac{t}{2}+W(t)} \leftarrow SVAR$$

b) Det följer att

$$E\left[X(t)\right] = 2e^{\frac{t^2}{2}}E\left[e^{-\frac{t}{2}+W(t)}\right] = 2e^{\frac{t^2}{2}} \leftarrow SVAR$$