OPTIONER OCH MATEMATIK (CTH[$TMA155$],GU[$MAM690$])

Skrivningsdag: 19 maj 2001, kl $8^{45} - 12^{45}$ *Lokal*: vv *Hjälpmedel:* Beta
Telefonvakt: Christer Borell, tel. 92 18 93 *OBS:* Text på flera sidor

– –

Nedan betecknar $S(t)$ ett aktiepris vid tiden t och $B(t) = B(0)e^{rt}$ ett obligationspris vid tiden t. Det förutsätts att en aktie inte ger utdelning såvida annat ej anges. Vidare betecknar $(W(t))_{t\geq 0}$ en reellvärd normaliserad Wienerprocess med kontinuerliga trajektorier. I samband med de fem första uppgifterna preciseras inom parentes före respektive uppgifts formulering, vilken matematisk modell som avses.

1. [$2p + 1p$] (Binomialmodellen med $d = -u < 0$, $0 < r < u$ och $T = 2$) Ett derivat av europeisk typ utbetalar beloppet

$$Y = \max(0, S(2) - S(0))$$

slutdagen $T = 2$. a) Bestäm derivatets värde vid tiden $t = 0$. b) Låt $h = (h_S(t), h_B(t))_{t=0}^{2}$ vara en självfinansierande strategi som replikerar Y dvs uppfyller $V_h(2) = Y$. Bestäm $h_S(0)$.

2. [$3p$] (Värdepappersmodell med r konstant, där dominansprincipen gäller) Ett aktiederivat av europeisk typ utbetalar beloppet $Y = \mid S(T) - K \mid$ slutdagen T, där K är en given positiv konstant. Bilda en portfölj $\mathcal{A}$ bestående av aktier, obligationer och aktieköpoptioner så att derivatets och portföljens värden är lika vid varje tidpunkt $t \leq T$ dvs bestäm $\mathcal{A}$ så att $\Pi_Y(t) = V_{\mathcal{A}}(t)$ för $t \leq T$.

3. [$3p$] (Black-Scholes modell) Ett aktiederivat av europeisk typ har slutdagen T och utbetalar denna dag beloppet $\sqrt{S(T)}$. Beräkna derivatets pris vid tiden $t < T$.

4. [$4p$] (Black-Scholes modell för utdelande aktie) Ett aktiederivat av europeisk typ utbetalar slutdagen T beloppet $\max(0, \ln \frac{S(T)}{K})$, där K är en given positiv konstant. Aktien utdelar det kända beloppet D vid tiden $t_* < T$. Bestäm derivatets värde vid tiden $t < t_*$ (aktiepriset vid tiden t är strikt större än D).

5. [$3p$] (Värdepappersmodell med r konstant, där dominansprincipen gäller) Visa att det ej är optimalt att lösa in en aktieköpoption av amerikansk typ före slutdagen då aktien ej ger utdelning.

6. $[0.5p + 0.5p + 2p]$ a) Antag $G \in N(0,1)$. Visa att $E\left[e^{i\xi G}\right] = e^{-\frac{\xi^2}{2}}$, $\xi \in \mathbf{R}$. b) Antag X är en Gaussiskt fördelad stokastisk variabel. Visa att $E\left[e^{iX}\right] = e^{iE[X]-\frac{1}{2}\mathrm{Var}(X)}$. c) Processen $(X_k)_{k=1}^n$ är Gaussisk. Visa att de stokastiska variablerna $X_1, ..., X_n$ är stokastiskt oberoende om och endast om $\mathrm{Cov}(X_j, X_k) = 0$ för alla $j, k \in \{1, ..., n\}$ sådana att $j \neq k$.

7. $[1p + 2p]$ a) Ett kontrakt ger innehavaren rättigheten och skyldigheten, att köpa en dollar för K kr vid tiden T. Vilket värde har kontraktet vid tiden $t < T$? Vilka förutsättningar bygger din värdering på? b) Ett kontrakt ger innehavaren rättigheten men ej skyldigheten, att köpa en dollar för K kr vid tiden T. Vilket värde har kontraktet vid tiden $t < T$? Vilka förutsättningar bygger din värdering på?

8. $[3p]$ Antag $0 < t_1 < ... < t_n$ och att $A_1, ..., A_n$ är delintervall av $\mathbf{R}$. Visa att
$$P\left[W(t_1) \in A_1, ..., W(t_n) \in A_n\right]$$
$$= \int_{A_1} ... \int_{A_n} \prod_{k=1}^{n} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_k - t_{k-1})}} e^{-\frac{(x_k - x_{k-1})^2}{2(t_k - t_{k-1})}} \right\} dx_1 ... dx_n$$
där $t_0 = 0$ och $x_0 = 0$.

FORMLER

BINOMIALMODELLEN: $q_u = \frac{e^r - e^d}{e^u - e^d}$, $q_d = \frac{e^u - e^r}{e^u - e^d}$

BLACK-SCHOLES MODELL: Aktiepris $S(t) = S(0)e^{(\alpha - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t)}$; obligationspris $B(t) = B(0)e^{rt}$; köpoptionspris
$$c(t, s, K; T) = s\Phi(d_1) - Ke^{-r\tau}\Phi(d_2)$$
där $s = S(t)$, $\tau = T - t > 0$ och
$$d_1 = \frac{\ln \frac{s}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} = d_2 + \sigma\sqrt{\tau}$$