LÖSNINGAR OPTIONER OCH MATEMATIK 25 MAJ 2002

1. [3p] (Dominansprincipen) Antag K och L är positiva konstanter och betrakta ett aktiederivat av europeisk typ som slutdagen T utbetalar beloppet $Y = (L - (S(T) - K)^+)^+$. Visa att

$$\Pi_Y(t) = p(t, S(t), K + L; T) - p(t, S(t), K; T)$$

om $t \leq T$. (Om x är ett reellt tal definieras $x^+ = \max(0, x)$.)

Lösning: Bilda en portfölj $\mathcal{A}$ bestående av derivatet och en europeisk säljoption med lösenpris K och slutdag T. Bilda också en portfölj $\mathcal{B}$ bestående av en europeisk säljoption med lösenpris $K + L$ och slutdag T. Det gäller att

$$V_{\mathcal{A}}(t) = \Pi_Y(t) + p(t, S(t), K; T)$$

och

$$V_{\mathcal{B}}(t) = p(t, S(t), K + L; T).$$

Fall $0 < S(T) \leq K$:

$$V_{\mathcal{A}}(T) = (L - (S(T) - K)^+)^+ + (K - S(T))^+ = L + (K - S(T))$$
$$= (L + K - S(T))^+ = V_{\mathcal{B}}(T).$$

Fall $K < S(T) \leq K + L$:

$$V_{\mathcal{A}}(T) = (L - (S(T) - K)^+)^+ + (K - S(T))^+ = (L - S(T) + K)^+$$
$$= (L + K - S(T))^+ = V_{\mathcal{B}}(T).$$

Fall $S(T) > K + L$:

$$V_{\mathcal{A}}(T) = (L - (S(T) - K)^+)^+ + (K - S(T))^+ = (L - S(T) + K)^+$$
$$= (L + K - S(T))^+ = V_{\mathcal{B}}(T).$$

Dominansprincipen medför nu för godtyckligt $t \leq T$ att $V_{\mathcal{A}}(t) = V_{\mathcal{B}}(t)$ dvs $\Pi_Y(t) + p(t, S(t), K; T) = p(t, S(t), K + L; T)$, vilket är ekvivalent med påståendet i uppgiften.

2. [3p] (Binomialmodellen med $d = -u < 0$, $0 < r < u$ och $T = 2$). Ett aktiederivat av europeisk typ utbetalar beloppet K slutdagen $T = 2$ om $S(T) = S(0)$. I annat fall sker ingen utbetalning slutdagen. Bestäm derivatets pris vid tiden 0.

Lösning: Sätt $s = S(0)$ och

$$S(t+1) = S(t)e^{X_{t+1}},\ t = 0, 1.$$

Observera att

$$S(2) = se^{X_1+X_2} = s$$

om och endast om $X_1 + X_2 = 0$, vilket endast inträffar om $X_1 = u$, $X_2 = d$ eller $X_1 = d$, $X_2 = u$ eftersom $d = -u < 0$. Låt $V(t)$ beteckna derivatets pris vid tiden t. Det gäller att

$$\begin{pmatrix} V(2)_{|X_1=u,X_2=u} = 0 \\ V(2)_{|X_1=u,X_2=d} = K \\ V(2)_{|X_1=d,X_2=u} = K \\ V(2)_{|X_1=d,X_2=d} = 0 \end{pmatrix}.$$

Införs

$$q_u = \frac{e^r - e^d}{e^u - e^d} = \frac{e^r - e^{-u}}{e^u - e^{-u}} = 1 - q_d$$

följer att

$$\begin{pmatrix} V(1)_{|X_1=u} = e^{-r}(q_u 0 + q_d K) = e^{-r} q_d K \\ V(1)_{|X_1=d} = e^{-r}(q_u K + q_d 0) = e^{-r} q_u K \end{pmatrix}.$$

Vi får nu att

$$\begin{aligned} V(0) &= e^{-r}\left\{q_u(e^{-r}q_dK) + q_d(e^{-r}q_uK)\right\} \\ &= 2e^{-2r}q_uq_dK \\ &= 2e^{-2r}\frac{(e^r - e^{-u})(e^u - e^r)}{(e^u - e^{-u})^2}K \leftarrow SVAR \end{aligned}$$

3. [3p] (Black-Scholes modell) Ett aktiederivat av europeisk typ utbetalar slutdagen T beloppet $Y = \cos^2(\ln S(T))$. Bestäm derivatets pris vid tiden $t \leq T$.

Lösning: Sätt $\tau = T - t$ och $g(s) = \cos^2(\ln s) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\ln s))$. Derivatets pris vid tiden t ges av ekvationen

$$\Pi_Y(t) = e^{-r\tau} E\left[g(se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau + \sigma W(\tau)})\right]_{|s=S(t)}.$$

Om $G \in N(0,1)$ följer att

$$e^{-r\tau} E\left[g(se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau + \sigma W(\tau)})\right]$$

$$= \frac{1}{2} e^{-r\tau} E\left[1 + \cos\left\{2\ln(se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau + \sigma\sqrt{\tau}G})\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{2} e^{-r\tau}\left(1 + \mathrm{Re}\, E\left[e^{i\left\{2\ln s + (2r-\sigma^2)\tau + 2\sigma\sqrt{\tau}G\right\}}\right]\right)$$

$$= \frac{1}{2} e^{-r\tau}\left(1 + \mathrm{Re}(e^{i\left\{2\ln s + (2r-\sigma^2)\tau\right\}} E\left[e^{i2\sigma\sqrt{\tau}G}\right])\right)$$

$$= \frac{1}{2} e^{-r\tau}\left(1 + \mathrm{Re}(e^{i\left\{2\ln s + (2r-\sigma^2)\tau\right\}} e^{-2\sigma^2\tau})\right)$$

$$= \frac{1}{2} e^{-r\tau}\left(1 + e^{-2\sigma^2\tau}\cos(2\ln s + (2r-\sigma^2)\tau)\right)$$

och därmed är

$$\Pi_Y(t) = \frac{1}{2} e^{-r\tau}\left(1 + e^{-2\sigma^2\tau}\cos(2\ln S(t) + (2r-\sigma^2)\tau)\right) \leftarrow SVAR$$

4. Antag $t_0 < T_0 < T$.

a) [$1.5p$] (Black-Scholes modell) En forwardstartande aktiesäljoption av europeisk typ utbetalar beloppet $\max(0, S(T_0) - S(T))$ slutdagen T. Bestäm säljoptionens pris vid tiden t_0.

b) [$1.5p$] (Black-Scholes modell för utdelande aktie) En forwardstartande aktiesäljoption av europeisk typ utbetalar beloppet $\max(0, S(T_0) - S(T))$ slutdagen T. Bestäm säljoptionens pris vid tiden t_0 då aktien utdelar beloppet $\delta S(t_*-)$ vid tidpunkten t_*, där $T_0 < t_* < T$ och $0 < \delta < 1$.

Lösning: a) Låt $\Pi(t)$ beteckna optionens pris vid tiden t och sätt $\tau_0 = T - T_0$. Black-Scholes pris för en säljoption ger

$$\Pi(T_0) = S(T_0)e^{-r\tau_0}\Phi\left(-\frac{\ln\frac{S(T_0)}{S(T_0)} + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau_0}{\sigma\sqrt{\tau_0}}\right)$$

$$-S(T_0)\Phi(-\frac{\ln\frac{S(T_0)}{S(T_0)}+(r+\frac{\sigma^2}{2})\tau_0}{\sigma\sqrt{\tau_0}})$$

$$= S(T_0)\left\{e^{-r\tau_0}\Phi(-\frac{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau_0}{\sigma\sqrt{\tau_0}}) - \Phi(-\frac{(r+\frac{\sigma^2}{2})\tau_0}{\sigma\sqrt{\tau_0}})\right\}.$$

Ett arbitrageargument medför nu att

$$\Pi(t_0)$$

$$= S(t_0)\left\{e^{-r\tau_0}\Phi(-\frac{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau_0}{\sigma\sqrt{\tau_0}}) - \Phi(-\frac{(r+\frac{\sigma^2}{2})\tau_0}{\sigma\sqrt{\tau_0}})\right\}$$

$\leftarrow SVAR$

b) Låt $\Pi(t)$ beteckna optionens pris vid tiden t. Vi bestämmer först $\Pi(T_0)$. Sätt $g(s) = \max(S(T_0) - s)$. En känd formel ger att

$$\Pi(T_0) = e^{-r(T-T_0)}E\left[g(s^* e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-T_0)+\sigma W(T-T_0)})\right]$$

där vi skall sätta in $s^* = (1-\delta)S(T_0)$ då förväntan beräknats. Med beteckningen $\tau_0 = T - T_0$ erhålls

$$\Pi(T_0) = S(T_0)e^{-r\tau_0}\Phi(-\frac{\ln\frac{(1-\delta)S(T_0)}{S(T_0)}+(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau_0}{\sigma\sqrt{\tau_0}})$$

$$-(1-\delta)S(T_0)\Phi(-\frac{\ln\frac{(1-\delta)S(T_0)}{S(T_0)}+(r+\frac{\sigma^2}{2})\tau_0}{\sigma\sqrt{\tau_0}})$$

$$= S(T_0)\left\{e^{-r\tau_0}\Phi(-\frac{\ln(1-\delta)+(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau_0}{\sigma\sqrt{\tau_0}}) - (1-\delta)\Phi(-\frac{\ln(1-\delta)+(r+\frac{\sigma^2}{2})\tau_0}{\sigma\sqrt{\tau_0}})\right\}.$$

Ett arbitrageargument ger nu att

$$\Pi(t_0)$$

$$= S(t_0)\left\{e^{-r\tau_0}\Phi(-\frac{\ln(1-\delta)+(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau_0}{\sigma\sqrt{\tau_0}}) - (1-\delta)\Phi(-\frac{\ln(1-\delta)+(r+\frac{\sigma^2}{2})\tau_0}{\sigma\sqrt{\tau_0}})\right\}$$

$\leftarrow SVAR$

5. $[3p]$ (Dominansprincipen) Antag $t \leq T$. Visa att

$$S(t) - c(t, S(t), K; T) = Ke^{-r(T-t)} - p(t, S(t), K; T).$$

6. a) $[2p]$ Antag $G \in N(0,1)$. Visa att

$$E\left[e^{i\xi G}\right] = e^{-\frac{\xi^2}{2}},\ \xi \in \mathbf{R}.$$

b) $[2p]$ Låt $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ vara en i.i.d. sådan att

$$P\left[X_1 = 1\right] = P\left[X_1 = -1\right] = \frac{1}{2}.$$

Sätt

$$Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + ... + X_n),\ n \in \mathbf{N}_+.$$

Visa att

$$Z_n \to G.$$

7. (Black-Scholes modell)

a) $[1p]$ Antag $t \leq T$ och att $g \in \mathcal{P}$. Definiera det teoretiska priset $\Pi_Y(t)$ vid tiden t för ett derivat av europeisk typ som utbetalar beloppet $Y = g(S(T))$ slutdagen T.

b) $[3p]$ Antag $\tau = T - t > 0$. Visa att

$$c(t, s, K; T) = s\Phi(\frac{\ln\frac{s}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}) - Ke^{-r\tau}\Phi(\frac{\ln\frac{s}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}})$$

och

$$p(t, s, K; T) = Ke^{-r\tau}\Phi(-\frac{\ln\frac{s}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}) - s\Phi(-\frac{\ln\frac{s}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}).$$