OPTIONER OCH MATEMATIK (CTH[$TMA155$],GU[$MAM690$])

Skrivningsdag: 1 sept 2001, kl $8^{45} - 12^{45}$ *Lokal*: V *Hjälpmedel:* Beta
Telefonvakt: Christer Borell, tel 0733-92 28 26
OBS: Text på 2 sidor!

– –

Nedan betecknar $S(t)$ ett aktiepris vid tiden t.
I uppgift 1 förutsätts dominansprincipen och i uppgifterna 2 och 3 Black-Scholes modell.

1. [3*p*] Antag K, L är givna positiva tal och betrakta ett aktiederivat av europeisk typ som utbetalar beloppet

$$Y = \min\{\max(0, S(T) - K), L\}$$

slutdagen T. Visa att derivatets teoretiska pris vid tiden $t \leq T$ är lika med

$$\Pi_Y(t) = c(t, S(t), K; T) - c(t, S(t), K + L; T).$$

2. [$2p + 1p$] a) Funktionen $f(x, y)$ är kontinuerligt deriverbar i området $x > 0$, $y > 0$ och uppfyller relationen

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda f(x, y), \ \lambda > 0.$$

Visa att

$$f(x, y) = x f'_x(x, y) + y f'_y(x, y).$$

b) Visa att

$$c(t, s, K; T) = s c'_s(t, s, K; T) + K c'_K(t, s, K; T).$$

3. [3*p*] Ett aktiederivat av europeisk typ med slutdagen T utbetalar denna dag beloppet $g(S(T))$, där $g \in \mathcal{P}$. Bestäm en funktion $\Theta(t, s, y)$ sådan att derivatets pris vid tiden $t < T$ är lika med $v(t, S(t))$, där

$$v(t, s) = \int_0^\infty g(y)\Theta(t, s, y)dy.$$

4. [4*p*] Antag X,$Y \in N(0, 1)$ är stokastiskt oberoende. Beräkna

$$E\left[e^{\max(X,Y)}\right].$$

5. $[1p + 2p]$ a) Definiera binomialmodellen i ett tidssteg. b) Formulera och bevisa nödvändiga och tillräckliga villkor för att modellen skall vara arbitragefri.

6. $[3p]$ Antag att $X_k \in N(\alpha_k, \sigma_k^2)$, $k = 0, 1$, och att X_0 och X_1 är stokastiskt oberoende. Visa att $X_0 + X_1 \in N(\alpha_0 + \alpha_1, \sigma_0^2 + \sigma_1^2)$.

7. $[3p]$ Antag $t < t_* < T$ och $0 < \delta < 1$. Ett enkelt aktiederivat av europeisk typ utbetalar beloppet $g(S(T))$ slutdagen T. Härled under lämpliga förutsättningar, som noggrant anges, ett teoretiskt pris för derivatet då aktien utdelar beloppet $\delta S(t_*-)$ vid tiden t_*.

8. $[3p]$ Härled under lämpliga förutsättningar, som noggrant anges, en prisformel för optionen att få byta en aktie mot en annan aktie vid en bestämd tidpunkt.