LÖSNINGAR
OPTIONER OCH MATEMATIK (CTH[$TMA155$],GU[$MAM690$])

Skrivningsdag: 1 sept 2001, kl $8^{45} - 12^{45}$

\- -

Nedan betecknar $S(t)$ ett aktiepris vid tiden t.
I uppgift 1 förutsätts dominansprincipen och i uppgifterna 2 och 3 Black-Scholes modell.

1. [$3p$] Antag K, L är givna positiva tal och betrakta ett aktiederivat av europeisk typ som utbetalar beloppet

$$Y = \min\{\max(0, S(T) - K), L\}$$

slutdagen T. Visa att derivatets teoretiska pris vid tiden $t \leq T$ är lika med

$$\Pi_Y(t) = c(t, S(t), K; T) - c(t, S(t), K + L; T).$$

Lösning: Bilda en portfölj $\mathcal{A}$ bestående av ett derivat som i texten och en europeiskt köpoption i aktien med slutdag T och lösenpris $K + L$. Bilda också en portfölj $\mathcal{B}$ bestående av en europeisk köpoption i aktien med slutdag T och lösenpris K. Det gäller att

$$V_{\mathcal{A}}(T) = \min\{\max(0, S(T) - K), L\} + \max(0, S(T) - (K + L))$$

och

$$V_{\mathcal{B}}(T) = \max(0, S(T) - K).$$

Om $S(T) \geq K + L$ så är $S(T) - K \geq L > 0$ och $S(T) > K$. Detta ger

$$V_{\mathcal{A}}(T) = \min\{S(T) - K, L\} + S(T) - (K + L)$$

$$= L + S(T) - (K + L) = S(T) - K = V_{\mathcal{B}}(T).$$

Om $S(T) < K + L$ så är $S(T) - K < L$ och $\max(0, S(T) - K) < L$. Detta ger

$$V_{\mathcal{A}}(T) = \min\{\max(0, S(T) - K), L\} = \max(0, S(T) - K) = V_{\mathcal{B}}(T).$$

Alltså är $V_{\mathcal{A}}(T) = V_{\mathcal{B}}(T)$. För $t \leq T$ ger dominansprincipen att $V_{\mathcal{A}}(t) = V_{\mathcal{B}}(t)$ dvs

$$\Pi_Y(t) + c(t, S(t), K + L; T) = c(t, S(t), K; T)$$

vilket är ekvivalent med påståendet.

2. [$2p + 1p$] a) Funktionen $f(x,y)$ är kontinuerligt deriverbar i området $x > 0$, $y > 0$ och uppfyller relationen

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda f(x,y), \ \ \lambda > 0.$$

Visa att

$$f(x,y) = x f'_x(x,y) + y f'_y(x,y).$$

b) Visa att

$$c(t,s,K;T) = s c'_s(t,s,K;T) + K c'_K(t,s,K;T).$$

Lösning: a) Vi deriverar relationen

$$\lambda f(x,y) = f(\lambda x, \lambda y)$$

med avseende på λ och får

$$f(x,y) = x f'_x(\lambda x, \lambda y) + y f'_y(\lambda x, \lambda y).$$

Sätts $\lambda = 1$ följer att

$$f(x,y) = x f'_x(x,y) + y f'_y(x,y).$$

b) Enligt Black-Scholes teori gäller att

$$c(t,s,K;T) = e^{-r(T-t)} E\left[\max(0, s e^{r\tau} M_\sigma(T-t) - K)\right].$$

Eftersom

$$c(t, \lambda s, \lambda K; T) = \lambda c(t,s,K;T)$$

följer del b) från del a).

3. [$3p$] Ett aktiederivat av europeisk typ med slutdagen T utbetalar denna dag beloppet $g(S(T))$, där $g \in \mathcal{P}$. Bestäm en funktion $\Theta(t,s,y)$ sådan att derivatets pris vid tiden $t < T$ är lika med $v(t, S(t))$, där

$$v(t,s) = \int_0^\infty g(y) \Theta(t,s,y) dy.$$

Lösning: Vi vet att derivatets pris vid tiden $t < T$ är lika med $v(t, S(t))$, där

$$v(t,s) = e^{-r\tau} E\left[g(s e^{r\tau} M_\sigma(\tau))\right]$$

$$= e^{-r\tau}\int_{-\infty}^{\infty} g(se^{r\tau}e^{-\frac{\sigma^2}{2}\tau+\sigma\sqrt{\tau}x})e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$$

där $\tau = T - t$. Sätt

$$y = se^{r\tau}e^{-\frac{\sigma^2}{2}\tau+\sigma\sqrt{\tau}x}$$

dvs

$$x = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}(\ln\frac{y}{s} - (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau).$$

Härav följer att

$$v(t,s) = e^{-r\tau}\int_0^{\infty} g(y)e^{-\frac{1}{2\sigma^2\tau}(\ln\frac{y}{s}-(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau)^2}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}}\frac{dy}{y}.$$

Vi kan därför välja

$$\Theta(t,s,y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}}\frac{1}{y}e^{-r\tau-\frac{1}{2\sigma^2\tau}(\ln\frac{y}{s}-(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau)^2} \leftarrow SVAR$$

4. [4p] Antag X,$Y \in N(0,1)$ är stokastiskt oberoende. Beräkna

$$E\left[e^{\max(X,Y)}\right].$$

Lösning: Sätt $U = \max(X,Y)$. Det gäller att

$$P\left[U \le u\right] = P\left[X \le u\right]P\left[Y \le u\right] = \Phi^2(u).$$

Den stokastiska variabeln U har därför frekvensfunktionen $f_U(u) = 2\Phi(u)\varphi_1(u)$, där

$$\varphi_\sigma(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}.$$

Notera att

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_\alpha(u)\varphi_\beta(v-u)du = \varphi_{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}(v)$$

ty om $G, H \in N(0,1)$ så gäller att $\alpha G + \beta H \in N(0, \alpha^2+\beta^2)$.

Det gäller att

$$E\left[e^{\max(X,Y)}\right] = 2\int_{-\infty}^{\infty} e^u\Phi(u)\varphi_1(u)du$$

och för att lösa denna integral definieras

$$h(t) = 2\int_{-\infty}^{\infty} e^u \Phi(u+t)\varphi_1(u)du.$$

Observera att

$$\lim_{t\to-\infty} h(t) = 0.$$

Vidare gäller att

$$h'(t) = 2\int_{-\infty}^{\infty} e^u \varphi_1(u+t)\varphi_1(u)du$$

$$= 2e^{\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(u+t)\varphi_1(u-1)du$$

$$= 2e^{\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(u)\varphi_1(u-(t+1))du$$

$$= 2e^{\frac{1}{2}}\varphi_{\sqrt{2}}(t+1)$$

så

$$h(0) = \int_{-\infty}^{0} 2e^{\frac{1}{2}}\varphi_{\sqrt{2}}(t+1)dt = 2e^{\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{(t+1)^2}{4}}\frac{dt}{\sqrt{4\pi}}$$

$$= \left[s = \frac{t+1}{\sqrt{2}}\right] = 2e^{\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} e^{-\frac{s^2}{2}}\frac{ds}{\sqrt{2\pi}}$$

$$= 2e^{\frac{1}{2}}\Phi(\frac{1}{\sqrt{2}}) \leftarrow SVAR$$

Alternativ lösningsskiss: Utnyttja att

$$\max(x,y) = \frac{1}{2}(x+y+\mid x-y\mid)$$

samt att de stokastiska variablerna

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y)$$

är stokastiskt oberoende och båda $N(0,1)$-fördelade. Härav följer att

$$E\left[e^{\max(X,Y)}\right] = E\left[e^{\frac{1}{2}(X+Y+|X-Y|)}\right]$$

$$= E\left[e^{\frac{1}{2}(X+Y)}\right]E\left[e^{\frac{1}{2}(|X-Y|)}\right] = E\left[e^{\frac{1}{\sqrt{2}}G}\right]E\left[e^{\frac{1}{\sqrt{2}}|G|}\right]$$

där $G \in N(0,1)$ och resultatet följer lätt.