LÖSNINGAR
OPTIONER OCH MATEMATIK (CTH[$TMA155$],GU[$MAM690$])

Skrivningsdag: 7 sep 2002, fm
Lokal: M
Hjälpmedel: Beta
Telefonvakt: Christer Borell, tel 031 92 18 93
OBS: Text på 2 sidor!

1. (3p) Antag $X \in N(0,1)$ och $n \in \mathbf{N}$. Beräkna $E\left[X^{2n}\right]$.
Lösning: Det gäller att

$$E\left[X^{2n}\right] = 2\int_0^\infty x^{2n} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = \begin{bmatrix} x = \sqrt{2t} \\ dx = \frac{dt}{\sqrt{2t}} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty t^{n-\frac{1}{2}} e^{-t} dt.$$

Sätt $\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1}e^{-t}dt$, $a > 0$. Partiell integration visar att $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ om $a > 0$. Formeln ovan med $n = 0$ visar också att $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. Det följer nu att

$$E\left[X^{2n}\right] = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}}\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}}(n-\frac{1}{2}) \cdot ... \cdot \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \prod_{k=1}^{n}(2k-1)$$

där HL tolkas som 1 om $n = 0$.

2. (3p) (Binomialmodellen med $d = -u < 0$, $0 < r < u$ och $T = 2$) Ett derivat av europeisk typ utbetalar beloppet

$$Y = \max\{0, \max(S(1), S(2)) - S(0)\}$$

slutdagen $T = 2$. Låt $h = (h_S(t), h_B(t))_{t=0}^2$ vara en självfinansierande strategi som replikerar Y dvs uppfyller $V_h(2) = Y$. Bestäm $h_S(0)$.

Lösning: Sätt $S(0) = s$ och

$$S(t+1) = S(t)e^{X_{t+1}}, \; t = 0, 1.$$

Låt $V(t)$ beteckna derivatets värde vid tiden t. Vi har att

$$\begin{pmatrix} V(2)_{|X_1=u,X_2=u} = \max(0, \max(se^u, se^{2u}) - s) = s(e^{2u} - 1) \\ V(2)_{|X_1=u,X_2=d} = \max(0, \max(se^u, s) - s) = s(e^u - 1) \\ V(2)_{|X_1=d,X_2=u} = \max(0, \max(se^{-u}, s) - s) = 0 \\ V(2)_{|X_1=d,X_2=d} = \max(0, \max(se^{-u}, se^{-2u}) - s) = 0 \end{pmatrix}.$$

Definieras

$$\begin{cases} q_u = \frac{e^r - e^{-u}}{e^u - e^{-u}} \\ q_d = \frac{e^u - e^r}{e^u - e^{-u}} \end{cases}$$

så följer att

$$\begin{pmatrix} V(1)_{|X_1=u} = se^{-r}(q_u(e^{2u} - 1) + q_d(e^u - 1)) \\ V(1)_{|X_1=d} = 0 \end{pmatrix}.$$

Vidare gäller att

$$\begin{cases} h_S(1)se^u + h_B(1)B(1) = V(1)_{|X_1=u} \\ h_S(1)se^{-u} + h_B(1)B(1) = V(1)_{|X_1=d} \end{cases}$$

där $h(0) = h(1)$. Alltså är

$$h_S(0) = \frac{V(1)_{|X_1=u}}{s(e^u - e^{-u})}$$

$$= e^{-r}\frac{q_u(e^{2u} - 1) + q_d(e^u - 1)}{e^u - e^{-u}} \leftarrow SVAR$$

3. (3p) (Black-Scholes modell för utdelande aktie) Ett aktiederivat av europeisk typ utbetalar slutdagen T beloppet K om $S(T) > K$ och i annat fall utbetalas ingenting. Aktien utdelar det kända beloppet D vid tiden t_*, där $t_* < T$. Bestäm derivatets pris vid tiden $t < t_*$ (det förutsätts att $S(t) > D$).

Lösning: Sätt $\tau = T - t$ och $g(s) = K1_{]K,\infty[}(s)$. Derivatets pris vid tiden t ges av ekvationen

$$\Pi(t) = e^{-r\tau}E\left[g((s - De^{r(t-t_*)})e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau + \sigma W(\tau)})\right]_{|s=S(t)}.$$

Om $G \in N(0,1)$ följer att

$$\Pi(t) = Ke^{-r\tau}E\left[1_{]K,\infty[}((s - De^{r(t-t_*)})e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau - \sigma\sqrt{\tau}G})\right]_{|s=S(t)}$$

$$= Ke^{-r\tau}P\left[e^{\sigma\sqrt{\tau}G} < \frac{(s - De^{r(t-t_*)})e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau}}{K}\right]_{|s=S(t)}$$

$$= Ke^{-r\tau}P\left[G < \frac{\ln\frac{s-De^{r(t-t_*)}}{K} + (r-\frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right]_{|s=S(t)}$$

$$= Ke^{-r\tau}\Phi(\frac{\ln\frac{S(t)-De^{r(t-t_*)}}{K} + (r-\frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}) \leftarrow SVAR$$

4. (3p) Funktionen $u(x)$, $x > 0$, är två gånger kontinuerligt deriverbar och det gäller att $u'(x) > 0$ och $u''(x) > 0$ för alla $x > 0$. Låt vidare $a > 0$ vara givet och antag X_p är en 2-punktsfördelad stokastisk varibabel sådan att $P[X_p = +1] = p$ och $P[X_p = -1] = 1-p$. Visa att det för varje $h \in]0, a[$ existerar $p = p(a,h) \in]0,1[$ så att

$$u(a) = E[u(a + hX_p)].$$

Visa därefter att

$$\lim_{h\to 0+} \frac{p(a,h) - \frac{1}{2}}{h} = \frac{1}{4}R(a)$$

där

$$R(a) = -\frac{u''(a)}{u'(a)}.$$

(Funktionen R kallas Arrow-Pratts absoluta riskaversionsmått.)

Lösning. Ekvationen $u(a) = E[u(a + hX_p)]$ ger

$$u(a) = pu(a+h) + (1-p)u(a-h)$$

dvs

$$p = \frac{u(a) - u(a-h)}{u(a+h) - u(a-h)}.$$

Eftersom funktionen u är strängt växande gäller att $p \in]0,1[$.

En Taylorutveckling av funktionen u kring punkten a leder till ekvationen

$$u(a) = p\left\{u(a) + u'(a)h + \frac{1}{2}u''(a)h^2 + B(h)h^2\right\}$$

$$+(1-p)\left\{u(a)-u'(a)h+\frac{1}{2}u''(a)h^2+B(-h)h^2\right\}$$

där $B(h)\to 0$ då $h\to 0$. Härav följer att

$$0=(2p-1)u'(a)+\frac{1}{2}u''(a)h+(pB(h)+(1-p)B(-h))h$$

och

$$p=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\frac{u''(a)}{u'(a)}h-\frac{pB(h)+(1-p)B(-h)}{2u'(a)}h.$$

Alltså är

$$\lim_{h\to 0+}\frac{p(a,h)-\frac{1}{2}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0+}\left(-\frac{1}{4}\frac{u''(a)}{u'(a)}-\frac{pB(h)+(1-p)B(-h)}{2u'(a)}\right)=-\frac{u''(a)}{u'(a)}.$$

5. (3p) Betrakta binomialmodellen i en period med parametrarna u, d och r. Visa att det existerar ett arbitrage i denna modell om och endast om

$$r\notin\,]d,u[\,.$$

6.(4p) Antag att A är en sluten, icke-tom och konvex delmängd av $\mathbf{R}^n$ och antag $x\in\mathbf{R}^n$. Visa att det finns en unik punkt $y\in A$ sådan att

$$d(x,A)=d(x,y).$$

7. (4p) a) Ett kontrakt ger innehavaren rättigheten och skyldigheten, att köpa en dollar för K kr vid tiden T. Vilket värde har kontraktet vid tiden $t<T$? Vilka förutsättningar bygger din värdering på? b) Ett kontrakt ger innehavaren rättigheten men ej skyldigheten, att köpa en dollar för K kr vid tiden T. Vilket värde har kontraktet vid tiden $t<T$? Vilka förutsättningar bygger din värdering på?