LÖSNINGAR
OPTIONER OCH MATEMATIK (CTH[$TMA155$],GU[$MAM690$])

Skrivningsdag: 26 januari 2002, fm M

– –

Nedan betecknar $S(t)$ ett aktiepris vid tiden t och $(W(t))_{t\geq 0}$ en normaliserad Wienerprocess. I uppgifterna 3 och 8 förutsätts Black-Scholes modell.

1. [3p] Beräkna
$$E\left[W^4(t)\right].$$

Lösning: Det gäller att
$$E\left[W^4(t)\right] = E\left[(\sqrt{t}W(1))^4\right] = t^2\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}.$$
Men
$$\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = \left[-x^3 e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right]_{-\infty}^{\infty} + 3\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$$
$$= 3\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = 3E\left[W^2(1)\right] = 3$$
ty $W(t) \in N(0,t)$. Alltså gäller att
$$E\left[W^4(t)\right] = 3t^2 \leftarrow SVAR$$

2. [3p] Betrakta binomialmodellen där $d = -u < 0$, $0 < r < u$ och där $T = 2N$ är ett jämnt heltal. Ett aktiederivat av europeisk typ ger innehavaren beloppet 1 om aktiepriset slutdagen T är lika med $S(0)$ och i annat fall erhåller innehavaren ingenting. Bestäm derivatets värde vid tiden 0. (Att behandla fallet $N = 2$ korrekt ger 1.5p.)

Lösning: Sätt
$$g(s) = 1_{\{S(0)\}}(s)$$
så att derivatets värde vid tiden 0 ges av
$$v(0) = e^{-rT}\sum_{i_1,\ldots,i_T=u,d} q_{i_1}\cdot\ldots\cdot q_{i_T} g(S(0)e^{i_1+\ldots+i_T})$$

där
$$q_u = \frac{e^r - e^d}{e^u - e^d}$$
och
$$q_u = \frac{e^u - e^r}{e^u - e^d}.$$
Alltså är
$$v(0) = e^{-rT} \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_T=u,d \\ i_1+\ldots+i_T=0}} q_{i_1} \cdot \ldots \cdot q_{i_T}$$
$$= e^{-rT} \begin{pmatrix} T \\ N \end{pmatrix} \frac{(e^r - e^d)^N (e^u - e^r)^N}{(e^u - e^d)^T} \leftarrow SVAR$$

3. [$3p$] Ett finanasiellt derivat av Europeisk typ ger innehavaren beloppet 1 slutdagen T om $S(T) \leq K$ och i motsatt fall erhåller innehavaren ingenting. Antag $t < T$ och låt $v(t, S(t))$ beteckna derivatets pris vid tiden t. För vilket värde på s är $\Delta(s) = v'_s(t, s)$ minimal?

   Lösning: Sätt
   $$g(s) = 1_{]0,K]}(s)$$
   så att
   $$v(t,s) = e^{-r\tau} E\left[g(se^{r\tau} e^{-\frac{\sigma^2}{2}\tau + \sigma W(\tau)}) \right]$$
   där $\tau = T - t$. Det följer att
   $$v(t,s) = e^{-r\tau} P\left[\sigma W(\tau) \leq \ln\frac{K}{s} + (\frac{\sigma^2}{2} - r)\tau \right]$$
   $$= e^{-r\tau} \Phi(\frac{\ln\frac{K}{s} + (\frac{\sigma^2}{2} - r)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}})$$
   och
   $$\Delta(s) = -\frac{e^{-r\tau}}{\sigma\sqrt{\tau}} \frac{1}{s} \varphi(\frac{\ln\frac{K}{s} + (\frac{\sigma^2}{2} - r)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}})$$
   där $\Phi' = \varphi$. Utnyttjas att $\varphi'(x) = -x\varphi(x)$ blir
   $$\Delta'(s) = -\frac{e^{-r\tau}}{\sigma\sqrt{\tau}} \frac{1}{s^2} (\frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \frac{\ln\frac{K}{s} + (\frac{\sigma^2}{2} - r)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} - 1) \varphi(\frac{\ln\frac{K}{s} + (\frac{\sigma^2}{2} - r)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}).$$

Här är $\Delta'(s) = 0$ om och endast om

$$s = Ke^{-(r+\frac{\sigma^2}{2})\tau}.$$

Eftersom derivatan $\Delta'(s)$ har teckenväxlingen $-0+$ följer att $\Delta(s)$ är minimal om

$$s = Ke^{-(r+\frac{\sigma^2}{2})\tau} \leftarrow SVAR$$

4. [4p] Antag $X \in N(\alpha, \sigma^2)$, där $\sigma > 0$, och sätt $Y = e^X$. Visa att

$$E\left[\min(K, Y)\right]$$

$$= E\left[Y\right]\Phi(\frac{\ln\frac{K}{E[Y]} - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}) + K\Phi(\frac{\ln\frac{E[Y]}{K} - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma})$$

för alla $K > 0$.

Lösning: Det gäller att

$$E\left[\min(K, Y)\right] = E\left[Y;\ Y \leq K\right] + KP\left[\ Y \geq K\right].$$

Om $G \in N(0, 1)$ så blir

$$P\left[\ Y \geq K\right] = P\left[\ \alpha + \sigma G \geq \ln K\right]$$

$$= \Phi(\frac{\alpha + \ln\frac{1}{K}}{\sigma}) = \Phi(\frac{\ln(\frac{e^{\alpha+\frac{\sigma^2}{2}}}{K}) - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}) = \Phi(\frac{\ln\frac{E[Y]}{K} - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}).$$

Vidare är

$$E\left[Y;\ Y \leq K\right] = E\left[e^{\alpha+\sigma G};\ \alpha + \sigma G \leq \ln K\right]$$

$$= \int_{x \leq \frac{\ln K - \alpha}{\sigma}} e^{\alpha + \sigma x - \frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = e^{\alpha + \frac{\sigma^2}{2}} \int_{x \leq \frac{\ln K - \alpha}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}(x-\sigma)^2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$$

$$= E\left[Y\right]\Phi(\frac{\ln K - \alpha - \sigma^2}{\sigma}) = E\left[Y\right]\Phi(\frac{\ln(Ke^{-\alpha-\frac{\sigma^2}{2}}) - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma})$$

$$= E\left[Y\right]\Phi(\frac{\ln\frac{K}{E[Y]} - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}).$$

Härav följer att

$$E\left[\min(K, Y)\right]$$

$$= E\left[Y\right]\Phi(\frac{\ln\frac{K}{E[Y]} - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}) + K\Phi(\frac{\ln\frac{E[Y]}{K} - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}).$$

5. [3p] Visa att

$$S(t) - c(t, S(t), K; T) = Ke^{-r(T-t)} - p(t, S(t), K; T)$$

om dominansprincipen gäller.

6. [3p] Visa att det inte är optimalt att lösa in en aktieköpoption av amerikansk typ före slutdagen (då aktien ej ger utdelning). Det förutsätts att dominansprincipen gäller.

7. [3p] En reellvärd Gaussisk process $(X_k)_{k=1}^n$ uppfyller

$$\mathrm{Cov}(X_j, X_k) = 0 \text{ för } j \neq k.$$

Visa att de stokastiska variablerna $X_1, ..., X_n$ är stokastiskt oberoende.

8. [3p] Värdera köpoptioner på aktieterminskontrakt enligt Black-76.