OPTIONER OCH MATEMATIK (CTH[$TMA155$],GU[$MAM690$])
RÄKNEÖVNING 2

Kap 3: övning 13, 10, 8, 7 och 24.

Övning på träfftider: Antag $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ är en i.i.d. sådan att $P[X_n = 1] = P[X_n = -1] = \frac{1}{2}$ och sätt $Z_0 = 0$ och

$$Z_n = X_1 + ... + X_n, \ n \in \mathbf{N}_+.$$

Låt $A, -B \in \mathbf{N}$ vara heltal sådana att $A + B \geq 2$ och låt τ vara det minsta talet i mängden $\{m \in \mathbf{N};\ Z_m \in \{A, -B\}\}$ om denna mängd är icke-tom. I annat fall sätts $\tau = \infty$.

a) Fixera $k \in \mathbf{N}$ och låt A_k vara händelsen

$$[X_n = 1 \text{ för alla } n \in \{k(A+B), ..., (k+1)(A+B) - 1\}].$$

Beräkna $P[A_k]$. Visa också att

$$[\tau \geq n(A+B)] \subseteq \bigcap_{k=0}^{n-1} [A_k \text{ inträffar ej}] \text{ om } n \geq 1.$$

b) Visa att

$$P[\tau < \infty] = 1.$$

c) Visa att $E[\tau] = AB$. Ledning: Skriv $\tau = \tau(A, -B)$ och

$$g(k) = E[\tau(A-k, -B-k)], -B \leq k \leq A.$$

Utnyttja att $g(A) = g(-B) = 0$ och

$$g(k) = 1 + \frac{1}{2}g(k-1) + \frac{1}{2}g(k+1), \ -B < k < A.$$

d) Låt σ vara det minsta talet i mängden $\{m \in \mathbf{N};\ Z_m = 1\}$ om denna mängd är icke-tom. I annat fall sätts $\sigma = \infty$. Visa att

$$E[\sigma] = \infty.$$

e) Visa att $P\left[Z_{\tau(A,-B)} = A\right] = \frac{B}{A+B}$ och dra slutsatsen att $P[\sigma < \infty] = 1$. Ledning: Sätt $f(k) = P\left[Z_{\tau(A-k,-B-k)} = A - k\right]$, $-B \leq k \leq A$, och resonera som i c).