OPTIONER OCH MATEMATIK (CTH[$TMA155$],GU[$MAM690$])
RÄKNEÖVNING 3

1. Antag $X \in N(0,1)$ och sätt

$$Y = X1_{[|X| \leq c]} - X1_{[|X|>c]}$$

där c är ett givet positivt tal. a) Visa att $Y \in N(0,1)$. b) Välj c så att X och Y är okorrelerade. Visa för detta värde på c att

$$P[X > c, Y > c] = 0 \neq P[X > c]\, P[Y > c]$$

och dra slutsatsen att X och Y ej är stokastiskt oberoende. c) Man hör ibland talas om att okorrelerade Gaussiskt fördelade stokastiska variabler är stokastiskt oberoende. Hur bör detta påstående formuleras för att vara sant?

2. Antag X är en log-normal stokastisk variabel sådan att $\ln X \in N(0,1)$. a) Bestäm frekvensfunktionen f_X för X. b) Sätt

$$g(x) = \begin{cases} f_X(x)(1 + \sin(2\pi \ln x)), & x > 0, \\ 0, & \text{för övriga reella värden på } x. \end{cases}$$

Visa att $g(x) \geq 0$ och att

$$\int_0^\infty x^k g(x)dx = \int_0^\infty x^k f_X(x)dx$$

för alla $k \in \mathbf{N}$. (Det existerar alltså en stokastisk variabel Y sådan att $f_Y \neq f_X$ och $E[p(Y)] = E[p(X)]$ för alla polynom $p(x)$.)

3. Låt

$$F = C(t, S(t), K; T) - P(t, S(t), K; T).$$

a) Visa att

$$S(t) - K \leq F \leq S(t) - Ke^{-r(T-t)}.$$

b) Ge gränser för den amerikanska säljoptionens pris i Black-Scholes modell.

Kap 4: Övn. 1, 13, 11, 12