LÖSNINGAR
OPTIONER OCH MATEMATIK (CTH[$TMA155$],GU[$MAM690$])

Skrivningsdag: 25 jan 2003 fm
Lokal: V
Hjälpmedel: Beta

1.[3p] (Dominansprincipen). Antag $0 < K < L$. Ett aktiederivat av europeisk typ utbetalar slutdagen T beloppet

$$Y = \begin{cases} S(T) - L, \text{ om } S(T) \geq L \\ 0, \text{ om } K \leq S(T) < L \\ K - S(T), \text{ om } S(T) < K. \end{cases}$$

Bilda en portfölj bestående av aktier, obligationer och aktieköpoptioner av europeisk typ så att derivatets och portföljens värden är lika vid varje tidpunkt $t \leq T$.

Lösning: Det gäller att $Y = (S(T) - L)^+ + (K - S(T))^+ = (S(T) - L)^+ + K - S(T) + (S(T) - K)^+$. Om en portfölj $\mathcal{A}$ består av 1 aktieköpoption av europeisk typ med lösenpris L och slutdag T, $K/B(T)$ obligationer, -1 aktie och 1 aktieköpoption av europeisk typ med lösenpris K och slutdag T, så är $V_{\mathcal{A}}(T) = \Pi_Y(T)$. Dominansprincipen ger nu att $V_{\mathcal{A}}(t) = \Pi_Y(t)$, $t \leq T$.

2.[3p] Beräkna

$$E\left[(t + W(t))e^{-\frac{t}{2} - W(t)}\right].$$

Lösning: Det gäller att

$$E\left[(t + W(t))e^{-\frac{t}{2} - W(t)}\right] = e^{-\frac{t}{2}} \left\{tE\left[e^{-W(t)}\right] + E\left[W(t)e^{-W(t)}\right]\right\}.$$

Här är

$$E\left[e^{-W(t)}\right] = e^{\frac{t}{2}}.$$

Vidare gäller att

$$E\left[W(t)e^{-W(t)}\right] = \sqrt{t} \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\sqrt{t}x - \frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$$

$$= \sqrt{t}e^{\frac{t}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(\sqrt{t}+x)^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = \sqrt{t}e^{\frac{t}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} (y - \sqrt{t}) e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}}$$
$$= -te^{\frac{t}{2}}.$$

Härav följer att

$$E\left[(t + W(t))e^{-\frac{t}{2} - W(t)}\right] = 0 \leftarrow SVAR$$

3.[3p] Funktionen $f(x)$, $x > 0$ och är konvex. Visa att

$$f(x_1 + x_2) + f(x_2 + x_3) \leq f(x_2) + f(x_1 + x_2 + x_3)$$

för alla $x_1, x_2, x_3 > 0$.

Lösning: Antag $\theta, \lambda \in]0, 1[$ definieras av ekvationerna

$$x_1 + x_2 = \theta x_2 + (1 - \theta)(x_1 + x_2 + x_3)$$

och

$$x_2 + x_3 = \lambda x_2 + (1 - \lambda)(x_1 + x_2 + x_3).$$

Konvexiteten för $f(x)$ ger att

$$f(x_1 + x_2) \leq \theta f(x_2) + (1 - \theta) f(x_1 + x_2 + x_3)$$

och

$$f(x_2 + x_3) \leq \lambda f(x_2) + (1 - \lambda) f(x_1 + x_2 + x_3).$$

Genom addition av dessa olikheter följer att

$$f(x_1 + x_2) + f(x_2 + x_3)$$
$$\leq (\theta + \lambda) f(x_2) + (2 - (\theta + \lambda)) f(x_1 + x_2 + x_3).$$

Det återstår därför endast att visa att $\theta + \lambda = 1$, vilket följer av att

$$\theta = \frac{x_3}{x_1 + x_3}$$

och

$$\lambda = \frac{x_1}{x_1 + x_3}.$$

4.[3p] (Black-Scholes modell) Ett aktiederivat av europeisk typ utbetalar slutdagen T beloppet $S(T)-[S(T)]$, där $[S(T)]$ betecknar det största heltalet $\leq S(T)$. Bestäm derivatets värde vid tiden $t < T$.

Lösning: Sätt $f(x) = x$ om $0 \leq x < 1$ och $f(x) = 0$ för övriga reella tal x. Det gäller att

$$Y = S(T) - [S(T)] = \sum_{n=0}^{\infty} f(S(T) - n).$$

Vidare gäller för fixt $n \in \mathbf{N}$ och $s > 0$ att

$$f(s-n) = (s-n)^{+} - (s-n-1)^{+} - 1_{[n+1,\infty[}(s).$$

Ett aktiederivat av europeisk typ som utbetalar beloppet $f(S(T)-n)$ slutdagen T har vid tiden $t < T$ priset

$$c(t, S(t), n; T) - c(t, S(t), n+1; T) - e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{\infty} 1_{[n+1,\infty[}(S(t)e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau - \sigma\sqrt{\tau}x})e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$$

$$= c(t, S(t), n; T) - c(t, S(t), n+1; T) - e^{-r\tau}\Phi(\frac{\ln\frac{S(t)}{n+1} + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}})$$

där $\tau = T - t$. Härav följer att $\Pi_Y(t)$ är lika med

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ c(t, S(t), n; T) - c(t, S(t), n+1; T) - e^{-r\tau}\Phi(\frac{\ln\frac{S(t)}{n+1} + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}) \right\}$$

$$= S(t) - e^{-r\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \Phi(\frac{\ln\frac{S(t)}{n+1} + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}) \leftarrow SVAR$$

5.[1p + 3p] a) Definiera binomialmodellen med en period. b) Formulera och bevisa nödvändiga och tillräckliga villkor för att modellen skall vara arbitragefri.

6.[3p] (Dominansprincipen) Visa att det inte är optimalt att lösa in en aktieköpoption av amerikansk typ före slutdagen (då aktien ej ger utdelning).

7.[$4p$] Antag $0 < t_1 < ... < t_n$ och att $A_1, ..., A_n$ är delintervall av $\mathbf{R}$. Visa att

$$P\left[W(t_1) \in A_1, ..., W(t_n) \in A_n\right]$$

$$= \int_{A_1} \cdots \int_{A_n} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\prod_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1})}} e^{-\sum_{k=1}^{n} \frac{(x_k - x_{k-1})^2}{2(t_k - t_{k-1})}} dx_1 ... dx_n$$

där $t_0 = 0$ och $x_0 = 0$.