LÖSNINGAR
OPTIONER OCH MATEMATIK (CTH[$TMA155$],GU[$MAM690$])

Skrivningsdag: 30 maj 2003 fm
Lokal: v
Hjälpmedel: Beta

1.[$2p+1p$] (Bachelier-Samuelsons modell) Antag $T \geq 1$. a) Beräkna sannolikheten för händelsen $S(T) > S(T-1)$. b) Under vilka villkor på parametrarna är denna sannolikhet en strängt växande funktion av volatiliteten?

Lösning: a) Det gäller att

$$S(t) = S(0)e^{\alpha t + \sigma W(t)}$$

och det följer att

$$P\left[S(T) > S(T-1)\right] = P\left[e^{\alpha T + \sigma W(T)} > e^{\alpha(T-1)+\sigma W(T-1)}\right]$$

$$= P\left[W(T) - W(T-1) > -\frac{\alpha}{\sigma}\right] = \Phi(\frac{\alpha}{\sigma}).$$

b) Funktionen $\Phi(\frac{\alpha}{\sigma})$ är en strängt växande funktion av volatiliteten $\sigma > 0$ om och endast om $\alpha < 0$.

2.[$3p$] (Dominansprincipen). Antag $0 < K < L$. Ett aktiederivat av europeisk typ utbetalar slutdagen T beloppet

$$Y = \min(K, \mid S(T) - L \mid).$$

Bestäm en portfölj bestående av aktieköpoptioner och aktiesäljoptioner av europeisk typ så att derivatets och portföljens priser är lika vid varje tidpunkt $t \leq T$.

Lösning: Det gäller att

$$Y = (S(T)-L)^+ - (S(T)-L-K)^+ + (L-S(T))^+ - (L-K-S(T))^+.$$

Om en portfölj $\mathcal{A}$ består av 1 aktieköpoption av europeisk typ med lösenpris L och slutdag T, -1 aktieköpoption av europeisk typ med lösenpris $L+K$ och slutdag T, 1 aktiesäljoption av europeisk typ med lösenpris L och slutdag T och -1 aktiesäljoption av europeisk typ med lösenpris $L-K$ och slutdag T så är $V_{\mathcal{A}}(T) = \Pi_Y(T)$. Dominansprincipen ger nu att $V_{\mathcal{A}}(t) = \Pi_Y(t)$, $t \leq T$.

3.[3*p*] Antag $G \in N(0,1)$ och $\alpha \in \mathbf{R}$, där $\alpha \neq 0$. Bestäm korrelationen $\rho(\alpha)$ mellan de stokastiska variablerna $e^{\alpha G}$ och e^{G}. Beräkna även gränsvärdena

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \rho(\alpha) \text{ och } \lim_{\alpha \to -\infty} \rho(\alpha).$$

Lösning: Det gäller att $E\left[e^{\alpha G}\right] = e^{\frac{\alpha^2}{2}}$ och det följer att

$$\mathrm{Cov}(e^{\alpha G}, e^{G}) = E\left[e^{\alpha G} e^{G}\right] - E\left[e^{\alpha G}\right] E\left[e^{G}\right]$$

$$= e^{\frac{(\alpha+1)^2}{2}} - e^{\frac{\alpha^2+1}{2}} = e^{\frac{\alpha^2+1}{2}}(e^{\alpha} - 1)$$

och

$$\mathrm{Var}(e^{\alpha G}) = E\left[e^{2\alpha G}\right] - E^2\left[e^{\alpha G}\right] = e^{2\alpha^2} - e^{\alpha^2}$$

$$= e^{\alpha^2}(e^{\alpha^2} - 1).$$

Härav följer att

$$\rho(\alpha) = \mathrm{Cor}(e^{\alpha G}, e^{G}) = \frac{e^{\frac{\alpha^2+1}{2}}(e^{\alpha} - 1)}{\sqrt{e^{\alpha^2}(e^{\alpha^2} - 1)}\sqrt{e(e-1)}}$$

$$= \frac{e^{\alpha} - 1}{\sqrt{(e-1)(e^{\alpha^2} - 1)}} \leftarrow SVAR$$

Alltså är

$$\rho(\alpha) = \frac{e^{\alpha - \frac{\alpha^2}{2}} - e^{-\frac{\alpha^2}{2}}}{\sqrt{(e-1)(1 - e^{-\alpha^2})}}$$

och de aktuella gränsvärdena är båda lika med 0$\leftarrow SVAR$

4.[$2p+1p$] (Black-Scholes modell) a) Antag $0 < T_0 < T$. Ett aktiederivat av europeisk typ utbetalar beloppet 1 slutdagen T om $S(T) > S(T_0)$ och i annat fall sker ingen utbetalning. Beräkna derivates pris vid en godtycklig tidpunkt $t \in [0,T[$. b) Förändras derivates pris om aktien utdelar ett fixt belopp D vid tiden $t_* \in]0,T_0[$?

Lösning: a) Låt $\Pi(t)$ beteckna derivatets pris vid tiden t och definiera $s = S(t)$ och $\tau = T-t$. Om $T_0 \le t < T$ är $S(T_0)$ känd vid tiden t och vi får

$$\Pi(t) = e^{-r\tau} E\left[g(se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau + \sigma W(\tau)}) \right]$$

där $g = 1_{]S(T_0),\infty[}$. Härav följer att

$$\Pi(t) = e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{\infty} 1_{]S(T_0),\infty[}(se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau - \sigma\sqrt{\tau}x}) e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$$

$$= e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{\frac{\ln\frac{s}{S(T_0)} + (r-\frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = e^{-r\tau}\Phi(\frac{\ln\frac{s}{S(T_0)} + (r-\frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}).$$

Speciellt blir

$$\Pi(T_0) = e^{-r(T-T_0)}\Phi(\frac{1}{\sigma}(r-\frac{\sigma^2}{2})\sqrt{T-T_0})$$

ett uttryck som är känt före tiden T_0. Om $t < T_0$ följer nu att

$$\Pi(t)$$

$$= e^{-r(T_0-t)}e^{-r(T-T_0)}\Phi(\frac{1}{\sigma}(r-\frac{\sigma^2}{2})\sqrt{T-T_0}) = e^{-r\tau}\Phi(\frac{1}{\sigma}(r-\frac{\sigma^2}{2})\sqrt{T-T_0}) \leftarrow SVAR$$

b) Derivatet har samma pris som i del a) efter att utdelningen frånskiljts aktien (dvs med våra konventioner för $t_* \le t \le T$). Derivatet har även samma pris som i del a) före utdelningen frånskiljts aktien eftersom derivatets pris vid tiden T_0 är oberoende av aktieprisprocessen. Denna slutsats följer också av den allmänna optionsteorin för utdelande aktier i Black-Scholes modell. Låt nämligen

$$f(s) = e^{-r(T-T_0)}\Phi(\frac{1}{\sigma}(r-\frac{\sigma^2}{2})\sqrt{T-T_0}),\ s > 0.$$

Om $t < t_*$ så kan vi se vårt finansiella derivat som ett europeiskt derivat med slutdagen T_0 och utbetalninggsfunktionen f och det följer att

$$\Pi(t) = e^{-r(T_0-t)}E\left[f((s - De^{r(t-t_*)})e^{(r-\frac{\sigma^2}{s})(T_0-t)+\sigma W(T_0-t)})\right]$$

$$= e^{-r(T_0-t)}e^{-r(T-T_0)}\Phi(\frac{1}{\sigma}(r - \frac{\sigma^2}{2})\sqrt{T-T_0}) \leftarrow SVAR$$

5.[$1p + 2p$] a) Antag $X \in N(\alpha, \sigma^2)$. Ange den karakteristiska funktionen $c_X(\xi)$. b) Antag att $X_k \in N(\alpha_k, \sigma_k^2)$, $k = 0, 1$, där X_0 och X_1 är stokastiskt oberoende. Visa att $X_0 + X_1 \in N(\alpha_0 + \alpha_1, \sigma_0^2 + \sigma_1^2)$.

6.[$3p + 1p$] (Dominansprincipen) a) Visa att det ej är optimalt att lösa in en aktieköpoption av amerikansk typ före slutdagen då aktien ej ger utdelning. b) Gäller samma slutsats för en aktiesäljoption av amerikansk typ? Ange endast svar.

7.[$4p$] Härled under lämpliga förutsättningar, som noggrant anges, en prisformel för optionen att få byta en aktie mot en annan aktie vid en bestämd tidpunkt T.