LÖSNINGAR
OPTIONER OCH MATEMATIK (CTH[$TMA155$],GU[$MAM690$])

Skrivningsdag: 6 sep 2003
Hjälpmedel: Beta

1.[3p] Antag $X, Y, Z \in N(0,1)$ och att X, Y och Z är stokastiskt oberoende. Beräkna sannolikheten för händelsen $X - 2Y > Z$.

Lösning: Sätt $U = X - 2Y - Z$. Det gäller att $U \in N(0,6)$ varför $V =_{def} \frac{1}{\sqrt{6}} U \in N(0,1)$. Härav följer att $P[X - 2Y > Z] = P[U > 0] = P[V > 0] = \frac{1}{2}$.

2.[3p] (Dominansprincipen) Antag $0 < T_0 < T_1$. Ett finansiellt derivat av europeisk typ utbetalar beloppet $Y = S(T_1)/S(T_0)$ slutdagen T_1. Bestäm derivatets pris vid tidpunkten 0.

Lösning: Bilda vid tiden T_0 en portfölj $\mathcal{A}$ bestående av ett derivat och $-\frac{1}{S(T_0)}$ aktier. Eftersom $V_{\mathcal{A}}(T_1) = 0$ blir $V_{\mathcal{A}}(T_0) = 0$ enligt dominansprincipen. Alltså är $\Pi_Y(T_0) - \frac{1}{S(T_0)} S(T_0) = 0$ dvs $\Pi_Y(T_0) = 1$. Bilda nu vid tiden 0 en portfölj $\mathcal{B}$ bestående av ett derivat och $-\frac{1}{B(T_0)}$ obligationer. Eftersom $V_{\mathcal{B}}(T_0) = 0$ blir $V_{\mathcal{B}}(0) = 0$. Alltså är $\Pi_Y(0) - \frac{1}{B(T_0)} B(0) = 0$ dvs $\Pi_Y(0) = e^{-rT_0}$.

3.[3p] (Black-Scholes modell) En akties matematiska avkastning X i intervallet $[0,T]$ ges av $X = \ln \frac{S(T)}{S(0)}$. Antag $R > 0$ och $t \in [0, T[$. Bestäm priset vid tidpunkten t för ett derivat av europeisk typ som utbetalar beloppet $(R - X)^+$ slutdagen T.

Lösning: Sätt $g(s) = (R - \ln \frac{s}{S(0)})^+$, $s > 0$, och $\tau = T - t$. Priset vid tidpunkten t för det aktuella derivatet är lika med $v(t, S(t))$ där

$$v(t,s) = e^{-r\tau} E\left[g\left(s e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})\tau + \sigma W(\tau)}\right) \right]$$

$$= e^{-r\tau} E\left[(R - \ln \frac{s}{S(0)} - (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau - \sigma W(\tau))^+ \right]$$

$$= e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{\infty} (R - \ln \frac{s}{S(0)} - (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau - \sigma\sqrt{\tau} x)^+ e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$$

$$= e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{\frac{R - \ln \frac{s}{S(0)} - (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}} (R - \ln \frac{s}{S(0)} - (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau - \sigma\sqrt{\tau} x) e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$$

$$= e^{-r\tau}(R - \ln \frac{s}{S(0)} - (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau)\Phi(\frac{R - \ln \frac{s}{S(0)} - (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}})$$

$$+ e^{-r\tau} \sigma \sqrt{\frac{\tau}{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2\tau}(R - \ln \frac{s}{S(0)} - (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau)^2}.$$

4.[3p] (Black-Scholes modell) Antag $T > 0$, $N \in \mathbf{N}_+$ och $T_k = \frac{k}{N}T$, $k = 1, ..., N$. Ett derivat av europeisk typ utbetalar beloppet 1 slutdagen T om $S(T_1) \leq S(T_2) \leq ... \leq S(T_N)$ och i annat fall sker ingen utbetalning. Bestäm derivatets pris vid tiden 0.

Lösning: Sätt $g(s_1, ..., s_n) = 1$ om $s_1 \leq s_2 \leq ... \leq s_n$ och i annat fall sätts $g(s_1, ..., s_n) = 0$. Derivatets pris vid tiden 0 är lika med $v(S(0))$ där

$$v(s) = e^{-rT} E\left[g(se^{rT_1} M_\sigma(T_1), se^{rT_2} M_\sigma(T_2) ..., se^{rT_N} M_\sigma(T_N)) \right]$$

$$= e^{-rT} P\left[(r - \frac{\sigma^2}{2})T_{k-1} + \sigma W(T_{k-1}) \leq (r - \frac{\sigma^2}{2})T_k + \sigma W(T_k),\ k = 2, ..., N \right]$$

$$e^{-rT} P\left[W(T_k) - W(T_{k-1}) \geq -\frac{1}{\sigma}(r - \frac{\sigma^2}{2})\frac{T}{N},\ k = 2, ..., N \right]$$

$$e^{-rT} P\left[\frac{1}{\sqrt{\frac{T}{N}}}(W(T_k) - W(T_{k-1})) \geq -\frac{1}{\sigma}(r - \frac{\sigma^2}{2})\sqrt{\frac{T}{N}},\ k = 2, ..., N \right]$$

$$= e^{-rT} \Phi(\frac{1}{\sigma}(r - \frac{\sigma^2}{2})\sqrt{\frac{T}{N}})^{N-1}.$$

5.[3p] (dominansprincipen) Visa att

$$S(t) - c(t, S(t), K; T) = Ke^{-r(T-t)} - p(t, S(t), K; T).$$

6.[4p] Antag A är en sluten, icke-tom och konvex delmängd av $\mathbf{R}^n$ och $a \in A$. Visa, att

$$(x - P_A(x)) \cdot (a - P_A(x)) \leq 0$$

för alla $x \in \mathbf{R}^n$ ($P_A(x)$ betecknar den punkt i A som ligger närmast x).

7.[4p] Värdera köpoptioner på terminskontrakt enligt Black-76.