LÖSNINGAR
OPTIONER OCH MATEMATIK (CTH[$TMA155$],GU[$MAM690$])

Skrivningsdag: 24 jan 2004 fm
Hjälpmedel: Beta

1. [$3p$] (Black-Scholes modell) Antag $K > 0$. Ett finansiellt derivat av europeisk typ utbetalar beloppet $\min(S(T), K)$ slutdagen T. Bestäm en portfölj bestående av säljoptioner och obligationer som replikerar derivatet (dvs har samma teoretiska värde som derivatet t o m tidpunkten T).

Lösning. Det gäller att

$$\min(S(T), K) = K - \max(0, K - S(T))$$

dvs

$$\min(S(T), K) = \frac{K}{B(T)} B(T) - p(T, S(T), K; T).$$

Dominansprincipen medför att derivatet replikeras av en portfölj bestående av $\frac{K}{B(T)}$ obligationer och en utfärdad säljoption av europeisk typ med lösenpris K och slutdag $T \leftarrow SVAR$

2. [$3p$] (Binomialmodellen med $d = -u < 0$, $0 < r < u$ och $T = 2$) Låt $H(x) = 1$ om $x \geq 0$ och $H(x) = 0$ om $x < 0$. Ett aktiederivat, med inlösen vid tiden 1 eller 2, ställs ut vid tiden 0 och utbetalar beloppet

$$H((-1)^t(S(t) - S(0)))$$

om det löses in vid tiden $t \in \{1, 2\}$. Bestäm derivatets pris vid tiden 0.

Lösning: Sätt $S(0) = s$, $S(t+1) = S(t)e^{X_{t+1}}$, $t = 0, 1$, och

$$q_u = \frac{e^r - e^d}{e^u - e^d} = 1 - q_d.$$

Låt vidare $v(t)$ beteckna derivatets pris vid tiden t såvida derivatet existerar vid denna tidpunkt dvs ej lösts in vid en tidigare tidpunkt. Det gäller att $v(2) = H((s(e^{X_1+X_2} - 1))$ dvs

$$\begin{cases} v(2)_{|X_1=u,X_2=u} = 1 \\ v(2)_{|X_1=u,X_2=d} = 1 \\ v(2)_{|X_1=d,X_2=u} = 1 \\ v(2)_{|X_1=d,X_2=d} = 0. \end{cases}$$

Härav följer att

$$\begin{cases} v(1)_{|X_1=u} = \max(0, e^{-r}) = e^{-r} \\ v(1)_{X_1=d} = \max(1, e^{-r}(q_u 1 + q_d 0)) = 1. \end{cases}$$

Vi får nu att

$$v(0) = e^{-r}(q_u e^{-r} + q_d) \leftarrow SVAR$$

3. [3p] (Bachelier-Samuelsons modell) Antag n är ett positivt heltal och låt $a, T > 0$. Beräkna

$$P\left[\max_{1\le k\le n} \frac{S(kT)}{S((k-1)T)} \ge a\right].$$

Lösning. Det gäller att

$$P\left[\max_{1\le k\le n} \frac{S(kT)}{S((k-1)T)} \ge a\right] = 1 - P\left[\max_{1\le k\le n} \frac{S(kT)}{S((k-1)T)} < a\right]$$

$$= 1 - \Pi_{k=1}^{n} P\left[\frac{S(kT)}{S((k-1)T)} < a\right]$$

$$= 1 - P^n\left[\frac{S(T)}{S(0)} < a\right] = 1 - P^n\left[\alpha T + \sigma W(T) < \ln a\right]$$

$$= 1 - \Phi^n\left(\frac{\ln a - \alpha T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \leftarrow SVAR$$

4. [3p] (Black-Scholes modell) Antag $0 < T < T_1$ och låt $F(t)$ beteckna aktiens terminspris vid tiden t med leverans vid tiden T_1. Ett finansiellt derivat utbetalar beloppet $g(F(T))$ vid tiden T, där g är en begränsad kontinuerlig

funktion. Låt $v(t, F(t))$ beteckna derivatets pris vid tiden $t < T$. Visa att funktionen $v(t, f)$, $0 < t < T$, $f > 0$, uppfyller ekvationen

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\sigma^2 f^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial f^2} - rv = 0.$$

Lösning. Vi vet att

$$F(t) = S(t) e^{r(T_1 - t)}.$$

Derivatet kan ses som ett vanligt aktiederivat av europeisk typ som utbetalar beloppet $g(S(T)e^{r(T_1-T)})$ vid tiden T. Om $u(t,s) = v(t,f)$, där $f = se^{r(T_1-t)}$, blir $u(t, S(t))$ lika med derivatets pris vid tiden t. För $t < T$ gäller därför Black-Scholes differentialekvation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\sigma^2 s^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + rs \frac{\partial u}{\partial s} - ru = 0.$$

Eftersom

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} - rse^{r(T_1-t)} \frac{\partial v}{\partial f},$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial f} e^{r(T_1-t)}$$

och

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial f^2} e^{2r(T_1-t)}.$$

blir

$$\frac{\partial v}{\partial t} - rse^{r(T_1-t)} \frac{\partial v}{\partial f} + \frac{\sigma^2 s^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial f^2} e^{2r(T_1-t)} + rs \frac{\partial v}{\partial f} e^{r(T_1-t)} - rv = 0$$

dvs

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\sigma^2 f^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial f^2} - rv = 0.$$

5. [3*p*] Antag att A är en sluten, icke-tom och konvex delmängd av $\mathbf{R}^n$ och antag $x \in \mathbf{R}^n$. Visa att det finns en unik punkt $y \in A$ sådan att

$$d(x, A) = d(x, y).$$

6. $[2p + 2p]$ a) Ett kontrakt ger innehavaren rättigheten och skyldigheten, att köpa en dollar för K kr vid tiden T. Vilket värde har kontraktet vid tiden $t < T$? Vilka förutsättningar bygger din värdering på? b) Ett kontrakt ger innehavaren rättigheten men ej skyldigheten, att köpa en dollar för K kr vid tiden T. Vilket värde har kontraktet vid tiden $t < T$? Vilka förutsättningar bygger din värdering på?

7. $[4p]$ Låt $(X_k)_{k=1}^n$ vara en reellvärd Gaussisk process. Visa att $X_1, ..., X_n$ är stokastiskt oberoende om $\mathrm{Cov}(X_j, X_k) = 0$ för $j \neq k$.