LÖSNINGAR
OPTIONER OCH MATEMATIK (CTH[TMA155],GU[MAM690])

Skrivningsdag: 24 maj 2004 fm
Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.

1. (Binomialmodellen med $T = 2$, $u = -d > r > 0$) Ett aktiederivat av europeisk typ utbetalar beloppet

$$Y = \max_{n=0,1,2} S(n) - S(2)$$

slutdagen $T = 2$. a) Beräkna derivatets pris vid tiden 0. b) Låt $h = (h_S(t), h_B(t))_{t=0}^{2}$ vara en självfinansierande strategi som replikerar Y dvs uppfyller $V_h(2) = Y$. Bestäm $h_S(0)$.

Lösning: a) Sätt $S(0) = s$ och

$$S(t+1) = S(t)e^{X_{t+1}},\ t = 0, 1.$$

Låt $v(t)$ beteckna derivatets pris vid tiden t. Vi har

$$\begin{aligned}
v(2)_{|X_1=u,X_2=u} &= se^{2u} - se^{2u} = 0 \\
v(2)_{|X_1=u,X_2=d} &= se^{u} - s \\
v(2)_{|X_1=d,X_2=u} &= s - s = 0 \\
v(2)_{|X_1=d,X_2=d} &= s - se^{-2u}
\end{aligned}$$

och definieras

$$q_u = \frac{e^r - e^{-u}}{e^u - e^{-u}} = 1 - q_d$$

blir

$$\begin{aligned}
v(1)_{|X_1=u} &= e^{-r}(q_u 0 + q_d s(e^u - 1)) = q_d s e^{-r}(e^u - 1) \\
v(1)_{|X_1=d} &= e^{-r}(q_u 0 + q_d s(1 - e^{-2u}) = q_d s e^{-r}(1 - e^{-2u}).
\end{aligned}$$

Alltså är

$$v(0) = e^{-2r}s(q_u q_d(e^u - 1) + q_d^2(1 - e^{-2u})) \leftarrow SVAR$$

b) Kom ihåg att $h(0) = h(1)$. Ekvationerna

$$\begin{aligned} h_S(0)se^u + h_B(0)B(0)e^r &= q_d se^{-r}(e^u - 1) \\ h_S(0)se^{-u} + h_B(0)B(0)e^r &= q_d se^{-r}(1 - e^{-2u}) \end{aligned}$$

ger

$$\begin{aligned} h_S(0) &= \frac{1}{s}\frac{q_d se^{-r}(e^u - 1) - q_d se^{-r}(1 - e^{-2u})}{e^u - e^{-u}} \\ &= q_d e^{-r}\frac{e^u - 2 + e^{-2u}}{e^u - e^{-u}} \leftarrow SVAR \end{aligned}$$

2. Låt $(W(t))_{t\geq 0}$ vara en normaliserad Wienerprocess i tidsintervallet $[0,1]$. Sätt $U(t) = W(t) - tW(1)$, $0 \leq t \leq 1$. a) Beräkna $\mathrm{Cov}(U(s), U(t))$, $0 \leq s, t \leq 1$. b) Visa att processen $X(t) = (1+t)U(\frac{t}{t+1})$, $t \geq 0$, är en normaliserad Wienerprocess.

Lösning: a) Det gäller att $E[U(t)] = 0$. Om $0 \leq s, t \leq 1$ följer att

$$\mathrm{Cov}(U(s), U(t)) = E[U(s)U(t)] = E[(W(s) - sW(1))(W(t) - tW(1))]$$

$$= E[W(s)W(t)] - tE[W(s)W(1)] - sE[W(1)W(t)] + stE\left[W^2(1)\right]$$

$$= \min(s,t) - ts - st + st = \min(s,t) - st \leftarrow SVAR$$

b) Det gäller att $X(t)$, $t \geq 0$, är en Gaussprocess och $E[X(t)] = 0$. Om $0 \leq s \leq t \leq 1$ följer att

$$\mathrm{Cov}(X(s), X(t)) = E[X(s)X(t)]$$

$$= (1+s)(1+t)\left\{\min(\frac{s}{s+1}, \frac{t}{t+1}) - \frac{s}{s+1}\frac{t}{t+1}\right\}$$

$$= (1+s)(1+t)\frac{s}{s+1} - st = s.$$

Alltså gäller att $\mathrm{Cov}(X(s), X(t)) = \min(s,t)$, $0 \leq s, t \leq 1 \leftarrow SVAR$

3. (Black-Scholes modell för utdelande aktie) Antag $a \in \,]-1, \infty[\,$, $D \in [0, S(0)[$ och $T > 0$ är konstanter och definiera

$$R(T) = \frac{S(T)}{S(0)} - 1.$$

Ett derivat av europeisk typ utbetalar slutdagen T beloppet

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{om } R(T) < a \\ 0, & \text{om } R(T) \geq a. \end{cases}$$

Beräkna derivatets pris vid tiden 0 då aktien delar ut beloppet D vid tiden $\frac{T}{4}$ (fallet $D = 0$ ger 1.5 poäng).

Lösning: Sätt $s = S(0)$ och

$$h(x) = \begin{cases} 1 \text{ om } x > 0 \\ 0 \text{ om } x \leq 0. \end{cases}$$

Det gäller att

$$Y = h(a - R(T)) = h(a + 1 - \frac{S(T)}{s}).$$

Alltså är

$$\Pi_Y(0) = e^{-rT} E\left[h(a + 1 - \frac{s - De^{-r\frac{T}{4}}}{s} e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma W(T)})\right]$$

$$= e^{-rT} P\left[\frac{a+1}{1 - s^{-1} De^{-r\frac{T}{4}}} > e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma W(T)}\right]$$

$$= e^{-rT} P\left[\frac{1}{\sigma}\left\{\ln \frac{a+1}{1 - s^{-1} De^{-r\frac{T}{4}}} - -(r - \frac{\sigma^2}{2})T\right\} > W(T)\right]$$

$$= e^{-rT} \Phi(\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left\{\ln \frac{(a+1)S(0)}{S(0) - De^{-r\frac{T}{4}}} - (r - \frac{\sigma^2}{2})T\right\}) \leftarrow SVAR$$

4. Visa att

$$S(t) - c(t, S(t), K; T) = Ke^{-r(T-t)} - p(t, S(t), K; T) \text{ om } t \leq T$$

genom att definiera lämpliga portföljer och därefter utnyttja dominansprincipen.

5. Härled under lämpliga förutsättningar, som noggrant anges, en prisformel för optionen att få byta en aktie mot en annan aktie vid en bestämd tidpunkt T.