LÖSNINGAR
OPTIONER OCH MATEMATIK (CTH[$TMA155$],GU[$MAM690$])

Skrivningsdag: 11 september 2004 fm
Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.

1. (Binomialmodellen med $T = 2$, $u = -d > r > 0$) Ett aktiederivat av europeisk typ utbetalar beloppet

$$Y = \max(0, \frac{S(1)}{S(0)} - \frac{S(2)}{S(1)})$$

slutdagen $T = 2$. a) Beräkna derivatets pris vid tiden 0. b) Låt $h = (h_S(t), h_B(t))_{t=0}^2$ vara en självfinansierande strategi som replikerar Y dvs uppfyller $V_h(2) = Y$. Bestäm $h_S(0)$.

Lösning: a) Sätt $S(0) = s$ och

$$S(t+1) = S(t)e^{X_{t+1}},\ t = 0, 1.$$

Låt $v(t)$ beteckna derivatets pris vid tiden t. Vi har

$$\begin{aligned}
v(2)_{|X_1=u,X_2=u} &= (e^u - e^u)^+ = 0 \\
v(2)_{|X_1=u,X_2=d} &= (e^u - e^{-u})^+ = e^u - e^{-u} \\
v(2)_{|X_1=d,X_2=u} &= (e^{-u} - e^u)^+ = 0 \\
v(2)_{|X_1=d,X_2=d} &= (e^{-u} - e^{-u})^+ = 0
\end{aligned}$$

och definieras

$$q_u = \frac{e^r - e^{-u}}{e^u - e^{-u}} = 1 - q_d$$

blir

$$\begin{aligned}
v(1)_{|X_1=u} &= e^{-r}(q_u 0 + q_d(e^u - e^{-u})) = q_d e^{-r}(e^u - e^{-u}) \\
v(1)_{|X_1=d} &= e^{-r}(q_u 0 + q_d 0) = 0.
\end{aligned}$$

Alltså är

$$v(0) = e^{-r}(q_u q_d e^{-r}(e^u - e^{-u}) + q_d 0)$$

$$= q_u q_d e^{-2r}(e^u - e^{-u}) \leftarrow SVAR$$

b) Kom ihåg att $h(0) = h(1)$. Ekvationerna

$$\begin{aligned} h_S(0)se^u + h_B(0)B(0)e^r &= q_d e^{-r}(e^u - e^{-u}) \\ h_S(0)se^{-u} + h_B(0)B(0)e^r &= 0 \end{aligned}$$

ger

$$\begin{aligned} h_S(0) &= \frac{q_d e^{-r}(e^u - e^{-u})}{s(e^u - e^{-u})} \\ &= \frac{q_d e^{-r}}{s} \leftarrow SVAR \end{aligned}$$

2. (Black-Scholes modell för utdelande aktie) Antag $T > 0$ är en konstant. Ett derivat av europeisk typ utbetalar slutdagen T beloppet

$$Y = \max(0, S(T) - S(0)).$$

Beräkna derivatets pris vid tiden 0 då aktien delar ut beloppet $\frac{1}{2}S(0)$ vid tiden $\frac{T}{2}$.

Lösning: Sätt $s = S(0)$ och $D = \frac{1}{2}s$. Alltså är

$$\Pi_Y(0) = e^{-rT} E\left[((s - De^{-r\frac{T}{2}})e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma W(T)} - s)^+\right]$$

$$= c(0, s - De^{-r\frac{T}{2}}, s; T) = (s - De^{-r\frac{T}{2}})\Phi(d_1) - se^{rT}\Phi(d_2)$$

$$= s\left[(1 - \frac{1}{2}e^{-r\frac{T}{2}})\Phi(d_1) - e^{rT}\Phi(d_2)\right]$$

där

$$d_1 = \frac{\ln(1 - \frac{D}{s}e^{-r\frac{T}{2}}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\ln(1 - \frac{1}{2}e^{-r\frac{T}{2}}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$$

och

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

3. Antag $X, Y \in N(0,1)$ är stokastiskt oberoende. Beräkna

$$E\left[e^{|X+Y|+|X-Y|}\right].$$

Lösning: Det gäller att

$$E[X \pm Y] = E[X] \pm E[Y] = 0$$

och

$$E[(X+Y)(X-Y)] = E\left[X^2\right] - E\left[Y^2\right] = 0.$$

Eftersom

$$E\left[(X \pm Y)^2\right] = E\left[X^2\right] \pm 2E[X]E[Y] + E\left[Y^2\right] = 2$$

följer att $X+Y$, $X-Y \in N(0,2)$ och $X+Y$ och $X-Y$ är stokastiskt oberoende. Alltså är

$$E\left[e^{|X+Y|+|X-Y|}\right] = E\left[e^{|X+Y|}e^{|X-Y|}\right]$$

$$= E\left[e^{|X+Y|}\right]E\left[e^{|X-Y|}\right] = E^2\left[e^{|\sqrt{2}X|}\right]$$

$$= (\int_{-\infty}^{\infty} e^{\sqrt{2}|x|}e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}})^2 = 4(\int_0^{\infty} e^{\sqrt{2}x-\frac{x^2}{2}}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}})^2$$

$$= 4e^2(\int_0^{\infty} e^{-\frac{(x-\sqrt{2})^2}{2}}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}})^2 = 4e^2\Phi^2(\sqrt{2}) \leftarrow SVAR.$$

4. Betrakta binomialmodellen i en period med parametrarna u, d och r. Visa att det existerar ett arbitrage i denna modell om och endast om

$$r \notin \,]d, u[\,.$$

5. Antag $0 < t_1 < ... < t_n$ och att $A_1, ..., A_n$ är delintervall av $\mathbf{R}$. Visa att

$$P[W(t_1) \in A_1, ..., W(t_n) \in A_n]$$

$$= \int_{A_1} ... \int_{A_n} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\prod_{k=1}^n (t_k - t_{k-1})}} e^{-\sum_{k=1}^n \frac{(x_k - x_{k-1})^2}{2(t_k - t_{k-1})}} dx_1 ... dx_n$$

där $t_0 = 0$ och $x_0 = 0$.